Suites arithmetico-géométriques

Exercice 1 : (`Métropole ES Juin 2017`)
Au 1er janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :
- 25 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

Partie A

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que
$u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 12$. Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

1. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1er mars 2017.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 48$ pour tout entier naturel n.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
   b) Préciser v_0 et exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 852 \times 0,75^n + 48$.
3. La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ? Si oui, au bout de combien de mois ?

Partie B

Chaque adhérent verse une cotisation de 10 euros par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l'année 2017.
Le trésorier souhaite utiliser l'algorithme suivant dans lequel la septième et la dernière ligne sont restées incomplètes (pointillés).

1. Recopier et compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le montant total des cotisations de l'année 2017.

S et U sont des nombres réels et N est un entier

$S \leftarrow 0$ $U \leftarrow 900$
Pour N allant de 1 à 12 : $S \leftarrow \ldots$ $U \leftarrow 0,75U + 12$ **Fin Pour**
Afficher ...

2. Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017 ?

Exercice 2 : (`Antilles-Guyane septembre 2017`)
Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.
Le responsable du service de location de vélos constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou détériorés. Le budget alloué au service lui permet de racheter 30 vélos par an.
Le 1er janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.
On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre de vélos le 1er janvier de l'année $2017 + n$.
Ainsi $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 30$.

1. a) Justifier le coefficient $0,8$ dans l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1er janvier 2018 ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$.

d) La municipalité a décidé de maintenir ce service de location tant que le nombre de vélos reste supérieur à 160.

En quelle année le service de location s'arrêtera-t-il ?

3. Pour l'aider à maintenir le service de location, la municipalité a obtenu une subvention de la région qui sera versée de 2017 inclus à 2025 inclus. Par commodité, on suppose qu'elle est versée pour chaque année le 1er janvier, de 2017 inclus à 2025 inclus.

   Cette subvention s'élève à 20 euros par vélo disponible à la location.

   a) Justifier que la somme des subventions reçues pour les deux premières années s'élève à 7 800 euros.

   b) Déterminer la somme totale perçue grâce à cette subvention du 1er janvier 2017 au 1er janvier 2025.

Exercice 3 : (inspiré de Amérique du Nord ES Juin 2015)
Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année. Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.
A l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004 + n$. On a ainsi $u_0 = 25\,000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :

   a) au 1er janvier 2005 ;

   b) au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25\,000 \times 0,85^n$.

3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.

   Compléter les lignes L3, L4 et L5 de l'algorithme ci-dessous.

```
    u est un réel et n est un entier
L1 : u ← 25 000
L2 : n ← 0
L3 : Tant que ............ faire
L4 :     u ← ............
L5 :     n ← ............
L6 : Fin Tant que
L7 : Afficher n
```

4. Montrer que la valeur n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10. (On pourra établir un tableau de valeurs)

Partie B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. A partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparait et qu'il se produit 400 naissances.
On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014+n$. On a ainsi $v_0 = 5\,000$.

1. a) Calculer v_1 et v_2.

   b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.

c) On souhaite calculer les termes de la suite (v_n) à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	n	v_n	Evolution
2	0	$5\,000$	
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

Indiquer la formule à écrire dans la cellule B3.
Indiquer la formule à écrire dans la cellule C3, permettant de calculer la différence du nombre de singes d'une année à l'autre.

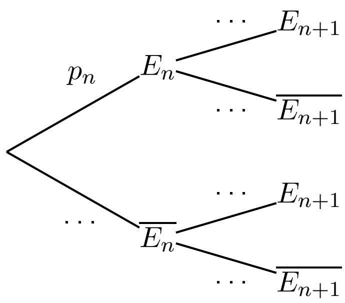
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1\,600$.
   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser la valeur de w_0.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1\,600 + 3\,400 \times 0,75^n$.
   d) Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

Exercice 4 : (Inspiré de Pondichéry S avril 2013)
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

* Un salarié malade est absent.
* La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
* Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,25$.
* Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,3$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
   $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,25$.
   c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - \frac{5}{19}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et q.
   d) En déduire la limite de la suite (p_n).
3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,263$.
   On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

a) En seconde, nous avons vu dans le cas d'un échantillon de taille $n \geqslant 25$ et d'un événement de probabilité $p \in [0,2 \ ; \ 0,8]$, que la fréquence de réalisation de cet événement lors d'un « sondage » appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ dans au moins 95% des cas. `Cet intervalle est appelé intervalle de fluctuation.`

Déterminer l'intervalle de fluctuation correspondant au nombre de malades pendant une semaine, en période d'épidémie, dans cette entreprise.

b) Durant la semaine correspondant au pic de l'épidémie, 69 employés étaient absents pour cause de grippe. Calculer la fréquence des absents (grippe) durant cette semaine. Peut-on considérer que ce nombre de malades est suspect ?

<u>Exercice 5</u> : `(Amérique du Nord S 2014)`

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,75 \times a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100. Compléter les parties manquantes de cet algorithme.

n est un entier naturel et a est un réel

$n \leftarrow 0$
$a \leftarrow 800$
Tant que $a < 1\,100$ **faire**
$\quad a \leftarrow \ldots$
$\quad n \leftarrow \ldots$
Fin Tant que
Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1\,320$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n,
   $a_n = 1\,320 - 520 \times (0,75)^n$.
5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
   Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.