Polynômes du second degré

(O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) est un repère du plan.

Exercice 1 - `Forme canonique`

1. Vérifier que l'écriture $-5(x-3)^2+25$ est la forme canonique du polynôme du second degré $P(x) = -5x^2+30x-20$.
2. Donner la forme canonique de chacun des polynômes suivants :
   $P(x) = x^2 - 4x + 5$; $Q(x) = x^2 + 8x - 27$; $R(x) = x^2 - 3x + 1$ et $S(x) = 3x^2 - 5x + 7$.

Exercice 2 - On considère le polynôme P de degré 2 donné sous forme canonique : $P(x) = -3(x-4)^2+7$. Démontrer que la fonction polynôme P est croissante sur $]-\infty\ ;\ 4]$ puis décroissante sur $[4\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3 - En utilisant les résultats du cours, étudier le sens de variation des fonctions polynômes suivantes :

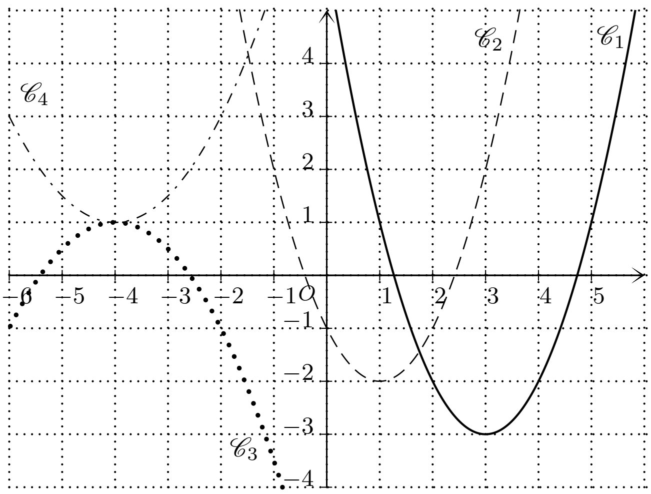
a. $P(x) = -3x^2 - 7x + 1$; b. $Q(x) = 5x^2 + 2$; c. $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + 4$;

d. $g(x) = 5 - 2(x+1)^2$; e. $h(x) = 2(1-3x)(1-x)$.

Exercice 4 - Les fonctions indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$. Attribuer sa courbe à chacune d'elles.

$f_1 : x \longmapsto x^2 - 6x + 6$; $f_2 : x \longmapsto \frac{1}{2}(x+4)^2 + 1$;

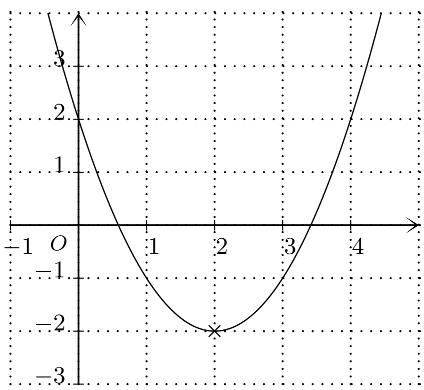
$f_3 : x \longmapsto (x-1)^2 - 2$; $f_4 : x \longmapsto -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 7$.



Exercice 5 -
La parabole ci-contre représente une fonction f définie par

$$f(x) = (x-\alpha)^2 + \beta\ .$$

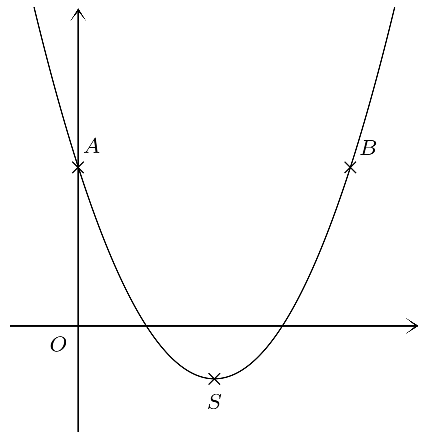
1. Déterminer par lecture graphique, les coordonnées du sommet de la parabole ?
2. En déduire l'expression de $f(x)$.
3. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec les deux axes de coordonnées. On utilisera une méthode algébrique.



Exercice 6 - `Utilisation de la propriété de symétrie de la parabole`

On considère la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \ .$$



1. On considère les deux points A et B de la parabole, ayant pour ordonnée $c = 3$. Calculer les abscisses des points A et B.
2. En calculant les coordonnées du point I, milieu du segment $[AB]$, en déduire l'abscisse du sommet S de la parabole, puis son ordonnée.
3. En déduire la forme canonique de $f(x)$.

Exercice 7 - Le propriétaire d'un cinéma de 1 000 places estime, pour ses calculs, qu'il vend 300 billets à 7 € par séance. Il a constaté qu'à chaque fois qu'il diminue le prix du billet de 0,10 €, il vend 10 billets de plus. Il engage une campagne de promotion.

1. Il décide de vendre le billet $4{,}50$ €.
   a. Combien y aura-t-il de spectateurs pour une séance ?
   b. Quelle est alors la recette pour une séance ?
2. À quel prix devrait-il vendre le billet pour remplir la salle ? Quel est votre commentaire ?
3. Le propriétaire envisage de proposer une réduction du billet de $x \times 0{,}10$ €.
   a. Quel est alors le prix d'un billet en fonction de x ?
   b. Exprimer en fonction de x la recette, notée $r(x)$, pour une séance.
   c. Indiquer le tableau de variation de la fonction r sur l'intervalle $[0 \ ; \ 70]$.
   d. En déduire la recette maximale, le prix du billet et le nombre de spectateurs à cette séance.

Exercice 8 - L'objectif de cet exercice est de trouver l'expression f de la trajectoire d'une balle de ping-pong.

1. Partie de l'origine du repère, la balle arriverait 150 cm plus loin sans filet. Elle s'est élevée de 50 cm de haut. Traiter ces données pour déterminer $f(x)$ sachant que f est une fonction polynôme de degré 2.
2. Sachant que le filet se trouve à 120 cm de l'origine et que sa hauteur est 15,25 cm, la balle est-elle passée au-dessus du filet ?

Exercice 9 - L'altitude d'un plongeur , en mètres, repérée par rapport au niveau de l'eau, est exprimée en fonction du temps écoulé, en secondes, depuis le départ du plongeur par $h(t) = -4t^2 + 4t + 3$.

1. Déterminer la forme canonique de $h(t)$.
2. À quelle hauteur se trouve le plongeoir ?
3. Quelle est l'altitude maximale du plongeur ?
4. Au bout de combien de temps le plongeur arrive-t-il dans l'eau ?