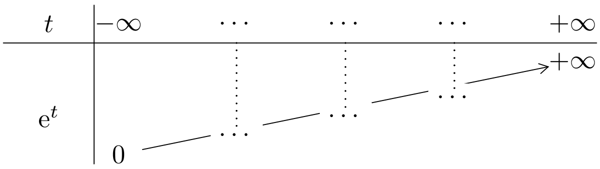
Chapitre 12

Le logarithme népérien

I. Définition de la fonction $\ln$

La fonction exponentielle est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in]0\ ;+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel y, noté $\ln(x)$, tel que $\mathrm{e}^y = x$.



Définition 1 :

On appelle logarithme népérien, la fonction notée $\ln$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

pour tout réel $x \in]0\ ;+\infty[$, et $y \in \mathbb{R}$, $\ln(x) = y$ équivaut à ....

Le logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Conséquences :

- $*$ Pour tout réel $x \in]0\ ;\ +\infty[, \mathrm{e}^{\ln(x)} = \dots$
- $*$ Pour tout $y \in \mathbb{R}, \ln(\mathrm{e}^y) = \dots$
- $*$ $\ln 1 = \dots$ et $\ln \mathrm{e} = \dots$
- $*$ ⚠ En général, $\ln(2\mathrm{e}^y) \neq \dots$

Définition 2 :

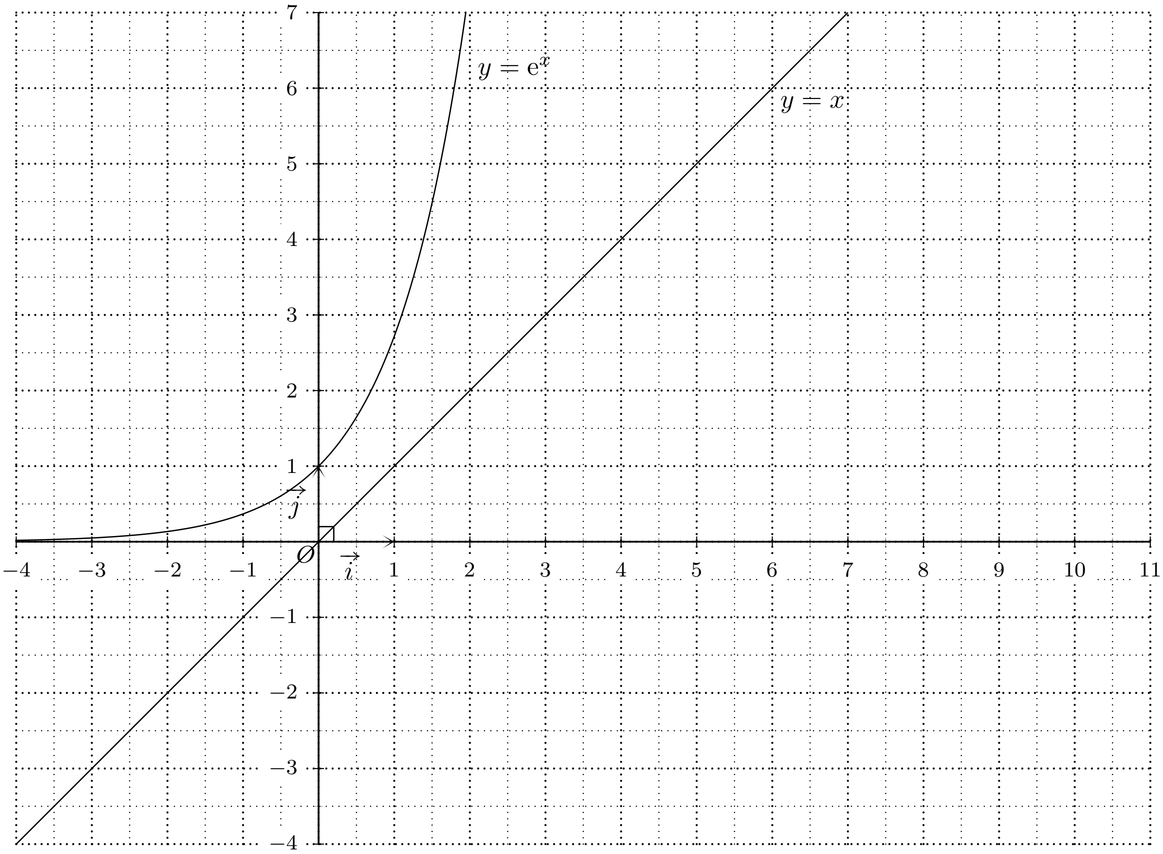
Soit $a > 0$ et $a \neq 1$.

$*$ *On appelle logarithme de base a, la fonction notée $\log_a$, définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$*

$*$ *On appelle logarithme décimal, la fonction notée $\log$, définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$*

II. Représentation graphique de la fonction $\ln$

x					
y					



Théorème 1 :
Dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_{\exp}$: $y = \mathrm{e}^x$ et $\mathscr{C}_{\ln}$: $y = \ln(x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

En particulier, par symétrie, la droite d'équation $y = x - 1$ est tangente à $\mathscr{C}_{\ln}$ en 1. On peut conjecturer que la fonction $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \dots$.
De plus, la fonction $\ln$ est .... sur $\mathbb{R}$.

III. Propriétés algébriques de la fonction $\ln$

Propriété 1 :
Pour tous réels a et b strictement positifs,

1) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

2) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

4) Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n\ln(a)$

5) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exemple :
Simplifier : $\ln(\mathrm{e}^3) = \dots$ $\quad \mathrm{e}^{\ln(3)} = \dots$ $\quad \mathrm{e}^{6\ln(2)} = \dots\dots\dots\dots$

Exercice 1 : Ecrire à l'aide d'un seul $\ln$.

* $\ln 7 + \ln 6 = \dots\dots$
* $\ln 63 - \ln 7 = \dots\dots$
* $1 + \ln 5 = \dots\dots$

Exercice 2 : Ecrire à l'aide de $\ln 3$.

* $\ln 27 = \dots\dots$
* $\ln(3\mathrm{e}^5) = \dots\dots$

Remarque : $\log(10^6) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\quad \log(10^{-9}) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

IV. Equations et inéquations avec $\ln$

Théorème 2 :
Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$,

* $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$
* $\ln(x) > \ln(y) \iff x > y$

Applications :

* Résoudre dans $\mathbb{R}, 3\mathrm{e}^x - 1 = 5$
....
....
....
....
....

* Résoudre dans $\mathbb{R}, \ln x = \ln 4$
....
....
....
....
....

* Résoudre dans $\mathbb{R}, 3\ln x + 2 = 7$
....
....
....
....
....

* Résoudre dans $\mathbb{R}, \ln(x-2) = \ln(3x+2)$
....
....
....
....
....

∗ Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(-3x+1) > 0$

....
....
....
....
....

∗ Déterminer le plus petit entier n tel que $0{,}7^n \leqslant 0{,}1$

....
....
....
....
....

V. Etude de la fonction $\ln$

1) Dérivée et variation de la fonction $\ln$

Théorème 3 :

∗ *La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif, $\ln'(x) = \ldots\ldots$*

∗ *La fonction $\ln$ est continue sur $]0\ ;\ +\infty[$.*

∗ *La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.*

∗ *La fonction $\ln$ est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$.*

∗ *La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction $x \longmapsto \ldots$*

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$		

Conséquences : ....
....
....
....

2) Dérivabilité de la fonction $\ln(u)$

Propriété 2 :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$.

Alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $\ln'(u) = \ldots\ldots$

Exemple :

$f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

....
....
....
....
....

Propriété 3 : Primitive

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Alors la fonction $\frac{u'}{u}$ admet une primitive sur I définie par ......

Exemple :

$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

....
....
....
....
....

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $]0\ ;+\infty[$.

....
....
....
....
....

3) Limites et $\ln$

Théorème 4 :

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \ldots\ldots$
* $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = \ldots\ldots$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \ldots\ldots$
* $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = \ldots\ldots$
* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ldots\ldots$
* *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = \ldots\ldots$
* *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0} x^n\ln(x) = \ldots\ldots$

Exemple :

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x + x$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{2x+3}$
* $\lim\limits_{x\to 0} (x^3+2x)\ln x$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$
* $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(3\mathrm{e}^x+4)$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$