Exercices : limites de fonctions

Exercice 1 : En l'infini, on factorise par le terme qui « l'emporte », si besoin.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^3+x^2-6\right)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(3x^5-5x^2+2\right)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x^2+3}{x+1}\right)$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)$; e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}(\sqrt{x}+3)\right)$.

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2x+1)e^x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{x+5}+3x-1$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+2}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}3e^{5x}-2x+1$.

Exercice 3 : On factorise par e^x. On utilise $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{3x}-2e^x+1$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

Exercice 4 : Le dénominateur tend vers zéro.

a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\frac{3x+4}{x-1}\right)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to2^-}\left(\frac{x^2-7x+1}{x-2}\right)$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to-3^+}\left(\frac{2x+3}{x^2+2x-3}\right)$; d) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+x-2}{x-1}\right)$. 1 est racine de x^2+x-2 : factoriser ce polynôme de degré 2

Exercice 5 : Étudier la limite de f en a : (deux calculs à effectuer $x<a$ et $x>a$)

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x+4}$ en $a=-4$; b) $f(x)=\dfrac{-3}{6-2x}$ en $a=3$;

c) $f(x)=\dfrac{-2x+5}{2x^2-7x-4}$ en $a=4$; d) $f(x)=\dfrac{-3x+1}{(x+1)^2}$ en $a=-1$.

Exercice 6 : On utilise les expressions conjuguées.

a) $\displaystyle\lim_{x\to9}\left(\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\right)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\right)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}\right)$.

Exercice 7 : Par composée.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{2x+1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{-x^2+1}$; c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}e^{-\frac{1}{x}}$.

Exercice 8 : On compare des fonctions.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(-x+\sin x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+\cos x}{x+1}\right)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+\sin x}{2x+\cos x}\right)$.

Exercice 9 : On utilise les croissances comparées (ou pas) :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^x-2x$; e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x-2x$; f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}3e^x-2x^3+2$.

Exercice 10 : Positions relatives

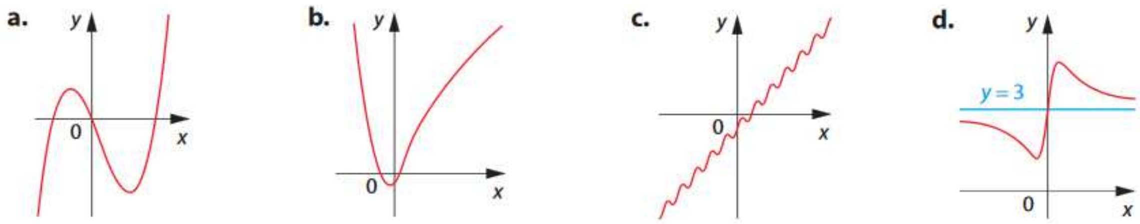
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+9x+1}{x+4}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-(2x+1)\big)$.

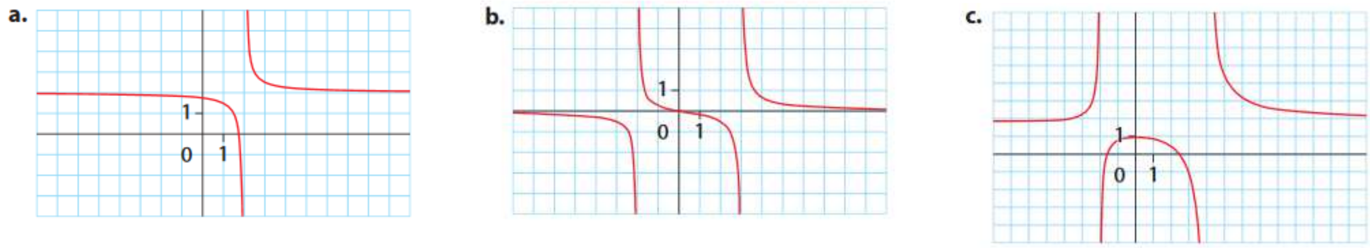
   On dit que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x+1$ est asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au voisinage de l'infini.

2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

Exercice 11 : Émettre, pour chacune des fonctions représentées, une conjecture sur sa limite en $-\infty$ et sa limite en $+\infty$.



Exercice 12 : Chacune des fonctions représentées ci-dessous possède des asymptotes verticales et horizontales. Conjecturer les équations de ces asymptotes.



Exercice 13 : La fonction f a le tableau de variations ci-contre.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

1. Quelles sont les limites de f aux bornes de son domaine de définition ?
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 : Dans chaque cas, on donne le tableau de variations d'une fonction f. Donner les limites aux bornes du domaine de définition et en donner une interprétation graphique.

a.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	3

b.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	0

Exercice 15 : Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x-1}{4x+3}$ pour tout $x\neq-\frac{3}{4}$ admet deux asymptotes.