Fonction exponentielle

Exercice 1 - Simplifier les expressions suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

a) $\exp(3) \cdot \exp(2)$; b) $\exp(2) \cdot \exp(-2)$; c) $\dfrac{\exp(x)}{\exp(3x)}$; d) $(\exp(5))^3$.

Exercice 2 - Simplifier les expressions suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

a) $\dfrac{\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}}$; b) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$; c) $\mathrm{e}^{3-2x} \times \mathrm{e}^{x+5}$; d) $\dfrac{(\mathrm{e}^x)^3}{\mathrm{e}^{2x}}$;

e) $\mathrm{e}^x (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$; f) $\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}}$; g) $\dfrac{\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{e}}{(\mathrm{e}^{-x})^2}$; h) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$.

Exercice 3 - Factoriser les expressions suivantes par e^x ($x \in \mathbb{R}$) :

a) $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x$; b) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$; c) $x\mathrm{e}^{3x} + 6\mathrm{e}^{2x}$. On factorisera par e^{2x} ici.

Exercice 4 - Prouver les égalités suivantes pour tout réel $x \neq 0$.
Méthode : on factorise par e^x ou e^{-x} au numérateur et au dénominateur.

a) $\dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$; b) $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$; c) $\dfrac{1 + \mathrm{e}^{2x}}{1 - \mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} - 1}$.

Exercice 5 - Calculer la dérivée de la fonction f définie par :

a) $f(x) = 3\mathrm{e}^x - 2x$ sur $\mathbb{R}$; b) $f(x) = 2x^2 - 4\mathrm{e}^x + 1$ sur $\mathbb{R}$; c) $f(x) = x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$;

d) $f(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$; e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\exp(x) = \mathrm{e}$; b) $\exp(-x) = 1$; c) $\exp(x) = -2$; d) $\mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}$;

e) $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^3$; f) $\mathrm{e}^{x^2} = 1$; g) $\mathrm{e}^{4x} + 1 = 2$; h) $\mathrm{e}^{x^2-4} = (\mathrm{e}^{x+2})^2$.

Exercice 7 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 0$; b) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 0$; c) $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x - 4 = 0$; d) $\mathrm{e}^x + 7 - 8\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Exercice 8 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} < \mathrm{e}$; b) $\mathrm{e}^{-x} > 1$; c) $\mathrm{e}^{-x+5} > \mathrm{e}^x$; d) $\mathrm{e}^{x^2-3x} - \mathrm{e}^{-2} > 0$.

Exercice 9 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x \geqslant 5$.

Exercice 10 - Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 1)\mathrm{e}^x$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x + 3x - 1$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 2}$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3\mathrm{e}^x - 2x + 1$.

Exercice 11 - Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x+1}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2+1}$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1$.

Exercice 12 - Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^x + 1$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$; c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

Exercice 13 - Étudier le sens de variation des fonctions suivantes. On calculera les limites aux bornes du domaine de définition.

a) $f(x) = x + \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$ sur $\mathbb{R}^*$; c) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\mathrm{e}^x - 1)^2$ et C sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter graphiquement.
2. Étudier le sens de variation de f.

Exercice 15 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 7}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans une repère.

1. Vérifier, que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{4}{1 + 7\mathrm{e}^{-x}}$.
2. a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes dont on donnera les équations.
   b) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   c) Déterminer le plus petit encadrement de $f(x)$, pour x réel.

Exercice 16 - Calculer la dérivée de la fonction f définie par :

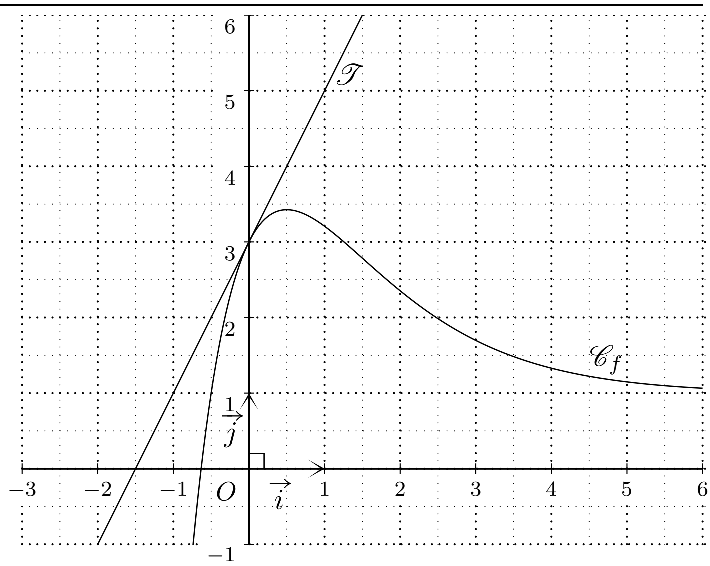
a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$; b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$; c) $f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{3x+1}$ sur $\mathbb{R}$;

d) $f(x) = \cos x \times \mathrm{e}^{\sin x}$ sur $\mathbb{R}$; e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

1. Étudier la parité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Quel est le signe de f ?
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
4. Étudier le sens de variation de f.

Exercice 18 - La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-contre est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 0.



1. En utilisant les données et le graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. On admet que l'expression de la fonction f est de la forme $1 + (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont des réels.
   a) Calculer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b et x.
   b) À l'aide des résultats de la question 1., déterminer l'expression de f.

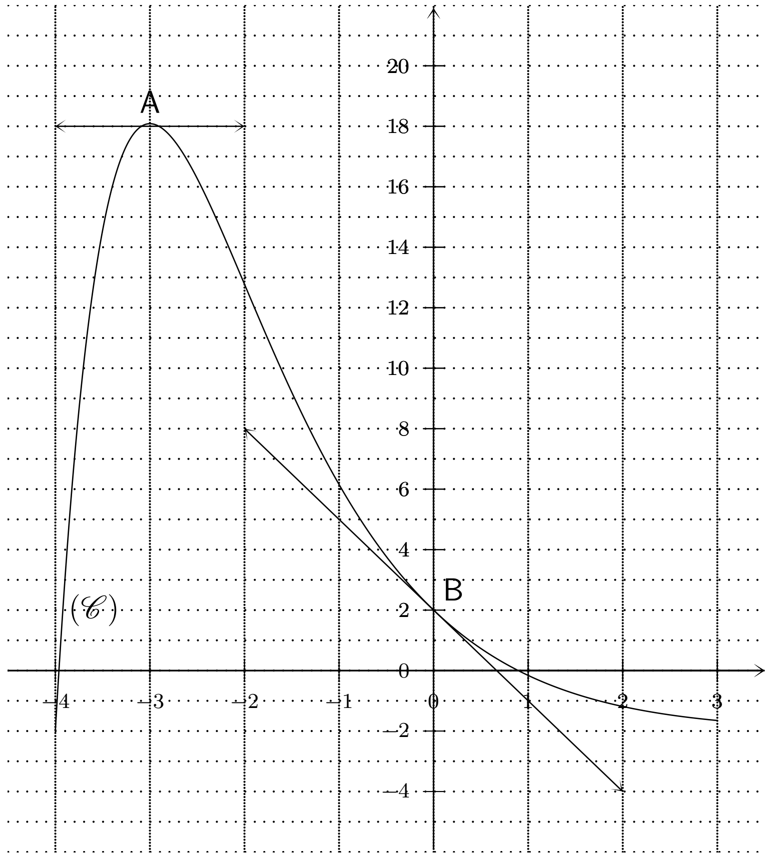
Exercice 19 - La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4 \ ; \ 3]$. Les points A d'abscisse -3 et B(0 ; 2) sont sur la courbe $(\mathscr{C})$.
Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.

PARTIE A

1. Par lecture graphique, déterminer :
   a) $f'(-3)$;
   b) $f(0)$ et $f'(0)$.
2. La fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par $f(x) = a + (x+b)\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.
   a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$.
   b) À l'aide des questions 1. b. et 2. a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 2 \\ 1-b &=& -3 \end{array}\right.$$

   c) Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.



PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par $f(x) = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$, $f'(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4\ ;\ 3]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3\ ;\ 3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

Exercice 20 - R.O.C

Dans cet exercice, on veut démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

On pose $h(x) = \mathrm{e}^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$, puis étudier le sens de variation de h. Conclure.

Exercice 21 - Calculer les limites suivantes (croissances comparées) :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{-x}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 2x$; f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 2x$; g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x+1)\mathrm{e}^x$; h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^x - 2x^3 + 2$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$; j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$; k) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

Exercice 22 - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ et on désigne par C sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction f est impaire.
2. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = x + 1 - \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = x - 1 + \frac{2}{\mathrm{e}^x+1}$.
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 23 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère (O ; $\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}$).

1. Justifier que, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Étudier les variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en 0.
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$.
   a) Prouver que $\varphi'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x-1)^2}{4(\mathrm{e}^x+1)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et étudier les variations de φ.
   b) En déduire le signe de $\varphi(x)$.
   c) En déduire la position relative de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

Exercice 24 -

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 0$, et étudier le signe de D$(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
   a) Prouver que f est impaire.
   b) calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
   c) Prouver que, pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
   d) Justifier que C admet trois asymptotes.

Exercice 25 - Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout réel x, $-f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x)$.
On désigne par g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x f(x)$ et $h(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$.

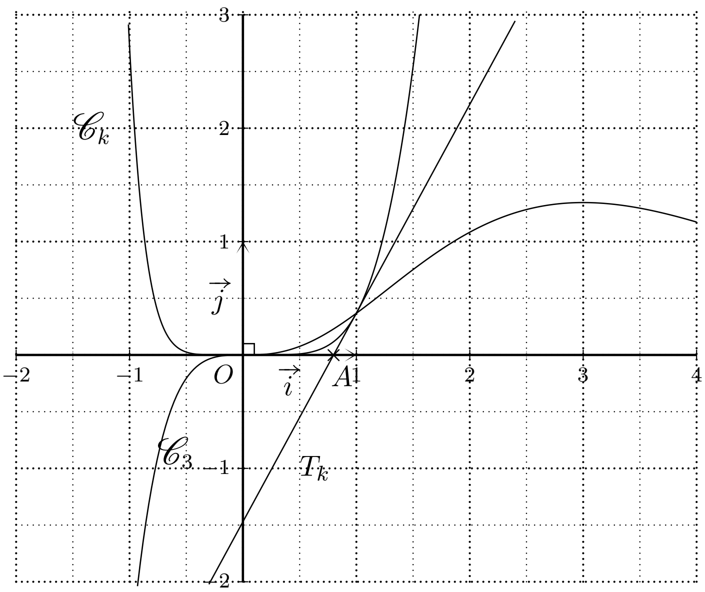
1. Montrer que g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer leurs fonctions dérivées.
2. Montrer que g est une fonction croissante et que h est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Déduire que, si $f(0) = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = 0$.

Exercice 26 - Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n}, \text{ pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$
Montrer par récurrence que la suite (u_n) est bornée par 0 et 1.

Exercice 27 - Étudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}, \text{ pour } n \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier n, u_n est positif.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.

Exercice 28 - Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\ ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.
La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\ ;\ 0\right)$.



1. a. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
   c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.
2. a. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
   b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x} .$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.
4. a. Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}\ ;\ 0\right)$.
   b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

Exercice 29 - Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$, pour k réel, par $f_k(x) = x\mathrm{e}^{-x} + kx$, et $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthogonal.

1. Sur la calculatrice, tracer $\mathscr{C}_k$ pour plusieurs valeurs de k. Pour quelles valeurs de k, la fonction f_k semble-t-elle monotone sur $\mathbb{R}$?
2. a) Calculer $f_k'(x)$ et $f_k''(x)$.
   b) À l'aide des variations de f_k', déterminer le signe de f_k' puis les variations de f_k.
   c) Démontrer alors la propriété conjecturée dans la question 1.