Continuité – exercice

Exercice 1 : (solution)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 4x^2 - 4$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
   `Attention, on décrira les variations de` g `avant de construire le tableau de variation.`
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On notera α cette solution. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,1$.
4. Dresser le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude d'une fonction f

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$, par $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x + 2}{x^2 - 4}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(\text{O}\ ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. On donnera une interprétation graphique quand cela est possible.
2. Calculer la fonction dérivée, $f'(x)$, de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$, $f'(x) = \dfrac{(x+4)g(x)}{\left(x^2 - 4\right)^2}$.
3. Établir le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$. En déduire le sens de variation de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

Partie C : courbe représentative de la fonction f

1. Reproduire et compléter le tableau suivant à l'aide des valeurs x et y affichées par l'algorithme ci-contre.

x	-10			$\dots$	
y				$\dots$	

2. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente $\mathscr{T}$ et les asymptotes éventuelles. On prendra 1 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 2 unités en ordonnée.

```python
x=-10
while x<=10:
  if x==-2 or x==2:
    x=x+1
  else:
    y=(x**3+4*x+2)/(x**2-4)
    print(x,y)
    x=x+1
```

Solution 1 :

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 4x^2 - 4$.

1. ☞ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$:

   Au voisinage de ∞, $g(x) = x^3\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^3}\right)$

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right) = 1\end{array}\right\} \implies \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \quad \text{par produit}$$

   ☞ De même $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.

   $g'(x) = 3x^2 - 8x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   $g'(x) = 0 \iff x(3x-8) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{8}{3}$

   D'où le tableau de signes de g :

x	$-\infty$		0		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$g'(x) \quad a > 0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   d'après le tableau de signes de g' sur $\mathbb{R}$, g est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, décroissante sur $[0\ ;\ \frac{8}{3}]$, puis croissante sur $[\frac{8}{3}\ ;\ +\infty[$.

   Tableau de variation de g :

   $g(0) = -4$

   $g\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{364}{27}$

x	$-\infty$		0		$\frac{8}{3}$		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\frac{364}{27}$	↗	0	↗	$+\infty$

3. $*$ g admet pour maximum -4 sur $]-\infty\ ;\ \frac{8}{3}]$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

   $*$ g est continue sur $[\frac{8}{3}\ ;\ +\infty[$ car dérivable, et strictement croissante. L'image de l'intervalle $[\frac{8}{3}\ ;\ +\infty[$ par g est $[-\frac{364}{27}\ ;\ +\infty[$.

   Comme $0 \in [-\frac{364}{27}\ ;\ +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[\frac{8}{3}\ ;\ +\infty[$ d'après la corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

   $*$ Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

   À la calculatrice,

   $$\left.\begin{array}{l} g(4,2) \approx -0,47 \\ g(4,3) \approx 1,55 \end{array}\right\} \implies 4,2 < \alpha < 4,3$$

4. Tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B : étude d'un fonction f

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$, par $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x + 2}{x^2 - 4}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. ☞ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

Au voisinage de ∞, $f(x) = \dfrac{x^3\left(1+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = x \times \dfrac{1+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\dfrac{4}{x^2}\right) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{par produit et quotient}$$

☞ De même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

☞ ⋆ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \left(x^3+4x+2\right) = -14 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \left(x^2-4\right) = 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty \quad \text{par quotient}$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^2-4 \quad a>0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

⋆ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \left(x^3+4x+2\right) = -14 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \left(x^2-4\right) = 0^- \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty \quad \text{par quotient}$$

⋆ Des deux limites précédentes, on déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -2$ pour asymptote verticale.

☞ ⋆ $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \left(x^3+4x+2\right) = 18 \\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \left(x^2-4\right) = 0^- \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty \quad \text{par quotient}$$

⋆ $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \left(x^3+4x+2\right) = 18 \\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \left(x^2-4\right) = 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty \quad \text{par quotient}$$

⋆ Des deux limites précédentes, on déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote verticale.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2+4)(x^2-4)-(x^3+4x+2)2x}{\left(x^2-4\right)^2} \\ &= \frac{3x^4-12x^2+4x^2-16-2x^4-8x^2-4x}{\left(x^2-4\right)^2} \\ &= \frac{x^4-16x^2-4x-16}{\left(x^2-4\right)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 16x^2 - 4x - 16}{\left(x^2-4\right)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2 \ ; \ 2\}$$

Mais, $(x+4)g(x) = (x+4)(x^3 - 4x^2 - 4) = x^4 - 4x^3 - 4x + 4x^3 - 16x^2 - 16 = x^4 - 16x^2 - 4x - 16, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2 \ ; \ 2\}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2 \ ; \ 2\}$, $f'(x) = \dfrac{(x+4)g(x)}{\left(x^2-4\right)^2}$.

3. Tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 \ ; \ 2\}$.

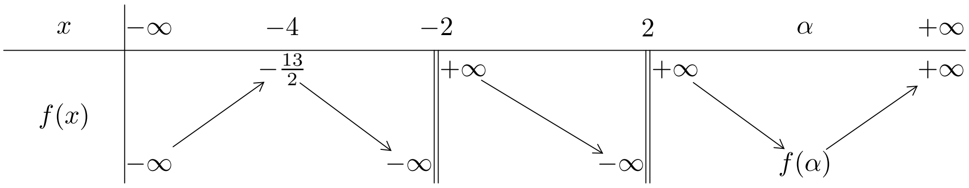
* $x + 4 = 0 \iff x = -4$
* $g(x) = 0 \iff x = \alpha$
* -2 et 2 sont des valeurs interdites.

x	$-\infty$		-4		-2		2		α		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\left(x^2-4\right)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	||	$-$	0	$+$	

D'où, f est croissante $]-\infty \ ; \ -4]$, décroissante sur $[-4 \ ; \ -2[$, décroissante sur $]-2 \ ; \ 2[$, décroissante sur $]2 \ ; \ \alpha]$ puis croissante sur $[\alpha \ ; \ +\infty[$.

Tableau de variation de f :

$f(0) = -\frac{13}{2}$



4. Une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisses -1 :

$\mathscr{T}: \quad y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$

$\mathscr{T}: \quad y = -3(x+1) + 1$ car $f'(-1) = -3$ et $f(-1) = 1$

$\mathscr{T}: \quad y = -3x - 2$

Partie C : courbe représentative de fonction f

```python
x=-10
while x<=10:
  if x==-2 or x==2:
    x=x+1
  else:
    y=(x**3+4*x+2)/(x**2-4)
    print(x,y)
    x=x+1
```

on ne calcule pas l'image de -2 et l'image de 2 par f car f n'est pas définie en -2 et en 2.

1. L'algorithme permet d'obtenir le tableau de valeurs suivant :

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-1	0	1	3	4	5	6	7	8	9	10
y	$-10,8$	$-9,9$	-9	$-8,2$	$-7,4$	$-6,8$	$-6,5$	$-7,4$	1	$-0,5$	$-2,3$	$8,2$	$6,8$	7	$7,5$	$8,3$	$9,1$	$9,9$	$10,8$

2.