Limites - asymptotes

Exercice 1 : (voir la solution)

1. Calculer les limites suivantes en détaillant les étapes :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^4+2x-5}{x^4+1}\right)\ ;\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{1+x^3}\right)\ ;\qquad \lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\ ;$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\left(3x-2+\frac{3x+1}{-2x+4}\right)\ ;\qquad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}\right)\ ;\qquad \lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right).$$

2. On rappelle que $\lim\limits_{X\to0}\left(\dfrac{\sin X}{X}\right)=1$

   En déduire $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{3x}\right)$.

Exercice 2 : (voir la solution)

Étudier les limites d'une fonction f aux bornes de son domaine de définition, où f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-5\ ;\ 2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$.

Exercice 3 : (voir la solution)

Calculer les limites :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+\sin x)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+\cos x}{x+1}\right)$.

Exercice 4 : (voir la solution)

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+9}+(x-3)\right)$.

Solution de l'exercice 1 :

1. • $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^4+2x-5}{x^4+1}\right)$:

$$\frac{3x^4+2x-5}{x^4+1}=\frac{x^4\left(3+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{5}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)}=\frac{3+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{5}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^4}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{5}{x^4}\right)=3\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)=1\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^4+2x-5}{x^4+1}\right)=3\quad\text{par quotient}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(x-1)^2}{1+x^3}\right)$:

$$\frac{(x-1)^2}{1+x^3}=\frac{x^2-2x+1}{1+x^3}=\frac{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(\dfrac{1}{x^3}+1\right)}=\frac{1}{x}\times\frac{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^3}+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}+1\right)=1\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{1+x^3}\right)=0\quad\text{par produit et quotient}$$

• $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)$:

$$\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\frac{(x-1)^2}{x-1}=x-1$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0}$

• $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\left(3x-2+\dfrac{3x+1}{-2x+4}\right)$:

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(3x-2)=4$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(3x+1)=7\\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(-2x+4)=0^+\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\left(\frac{3x+1}{-2x+4}\right)=+\infty\quad\text{par quotient}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\left(3x-2+\dfrac{3x+1}{-2x+4}\right)=+\infty}$ par somme

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}\right)$:

  $$\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x-1}} = \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2(x+1)}{\sqrt{x-1}} = (x+1)\sqrt{x-1}$$

  Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+1)\sqrt{x-1} = 0}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)$:

  En utilisant l'expression conjuguée de $\sqrt{x+4}-2$, on obtient

  $$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

  Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}\right) = \dfrac{1}{4}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 2x}{3x}\right)$:

   $\dfrac{\sin 2x}{3x} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sin 2x}{2x}$ `(on fait apparaître le nombre 2 au numérateur et au dénominateur)`

   En posant $X = 2x$, on a $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$

   D'où $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right) = 1$ par composée

   Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 2x}{3x}\right) = \dfrac{2}{3}}$

Solution de l'exercice 2 :

☞ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$:

Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-5\ ;\ 2\}$ et $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}\right)} = \dfrac{1-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} 1-\dfrac{4}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} 1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{10}{x^2} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}} = 1 \quad \text{par quotient}$$

D'où, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$. On peut dire que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

☞ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. On peut dire que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

☞ $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} f(x)$:

✍ $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} x^2 - 4 = 21 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} x^2 + 3x - 10 = 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} f(x) = +\infty$$

par quotient

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x^2 + 3x - 10$ $_{a>0}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✍ $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} x^2 - 4 = 21 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} x^2 + 3x - 10 = 0^- \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} f(x) = -\infty$$

par quotient

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x^2 + 3x - 10$ $_{a>0}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✍ Des deux limites précédentes, on déduit que la droite d'équation $x = -5$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f au voisinage de -5.

☞ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$:

On remarque que 2 est racine du numérateur et du dénominateur de $f(x)$. On peut donc factoriser le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par $x - 2$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5 \ ; \ 2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)} = \dfrac{x+2}{x+5}$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+2}{x+5} \right) = \dfrac{4}{7}$

<u>Solution de l'exercice 3</u> :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x + \sin x)$:

Au voisinage de $+\infty$, $\quad -x + \sin x \leqslant -x - 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x - 1 = -\infty$, par comparaison on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x + \sin x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x + \cos x}{x + 1} \right)$:

Au voisinage de $-\infty, -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

$$\Longrightarrow \quad 2x - 1 \leqslant 2x + \cos x \leqslant 2x + 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2x-1}{x+1} \geqslant \frac{2x + \cos x}{x+1} \geqslant \frac{2x+1}{x+1} \qquad \text{car } x + 1 < 0 \text{ au voisinage de } -\infty$$

De plus, au voisinage de $-\infty$, $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = 2 \quad \text{par quotient}$$

On montre de même que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x+1} = 2$

Ainsi, d'après le théorème des « gendarmes », on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+\cos x}{x+1}\right) = 2$

Solution de l'exercice 4 :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+9}+(x-3)\right)$:

On est en présence d'une forme indéterminée du type « $+\infty-\infty$ ».
Au voisinage de $-\infty$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-4x+9}+(x-3) &= \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+9}+(x-3)\right)\left(\sqrt{x^2-4x+9}-(x-3)\right)}{\sqrt{x^2-4x+9}-(x-3)} \quad \text{on utilise les quantités conjuguées}\\
&= \frac{x^2-4x+9-(x-3)^2}{\sqrt{x^2-4x+9}-(x-3)}\\
&= \frac{x^2-4x+9-(x^2-6x+9)}{\sqrt{x^2-4x+9}-(x-3)}\\
&= \frac{2x}{\sqrt{x^2-4x+9}-(x-3)}\\
&= \frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}-x\left(1-\frac{3}{x}\right)} \quad \text{car il y a une forme indéterminée du type « } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}\\
&= \frac{2x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}-x\left(1-\frac{3}{x}\right)}\\
&= \frac{2x}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}-x\left(1-\frac{3}{x}\right)} \quad \text{car } x \text{ est négatif}\\
&= \frac{2x}{x\left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}-\left(1-\frac{3}{x}\right)\right)}\\
&= \frac{2}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}-\left(1-\frac{3}{x}\right)}
\end{aligned}$$

En posant $X = 1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}\right)=1$ et $\displaystyle\lim_{X\to1}\sqrt{X}=1$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{x^2}} = 1$ par composée

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{3}{x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{x^2}} - \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)\right) = -2$ par somme

On a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 9} + (x - 3)\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2}{-\sqrt{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{x^2}} - \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)}\right) = \dfrac{2}{-2} = -1$ par quotient