Dérivabilité et fonction composée

Exercice 1 - Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ où f est définie sur I :

1. $f(x) = -3x^2 - 6x + 2\mathrm{e}^x, \quad I = \mathbb{R}\,;$
2. $f(x) = \dfrac{3}{5}x^4 + \mathrm{e}^x - \dfrac{4}{x^8}, \quad I = \mathbb{R}^*\,;$
3. $f(t) = t^2\sqrt{t}, \quad I = [0\ ;\ +\infty[\,;$
4. $f(x) = \dfrac{5x-3}{2x^2+1}, \quad I = \mathbb{R}\,;$
5. $f(x) = (-5x^2+3)\mathrm{e}^x, \quad I = \mathbb{R}\,;$
6. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 1}, \quad I = \mathbb{R}.$

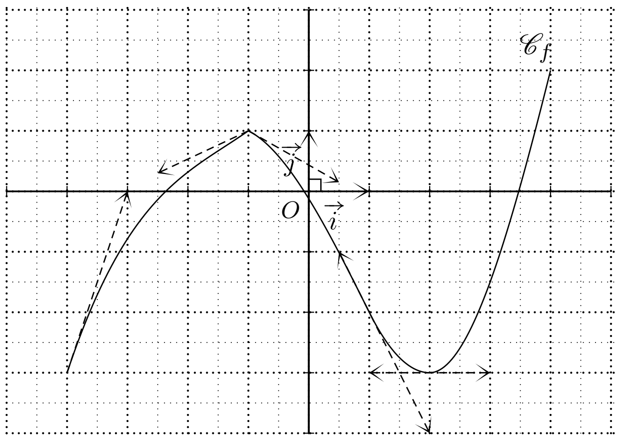
Exercice 2 - Soit f la fonction définie pour $x \neq -5$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x+5}$. On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f.

1. a) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
   b) Etudier la position relative de la droite (T) par rapport à la courbe (C).
2. Existe-t-il des tangentes à (C) admettant -7 pour coefficient directeur ?

Exercice 3 - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 9x + 6$.
Existe-t-il des tangentes à la courbe représentative de f, parallèles à la droite (AB) où $A\,(1\ ;\ 1)$ et $B\,(2\ ;\ -3)$?

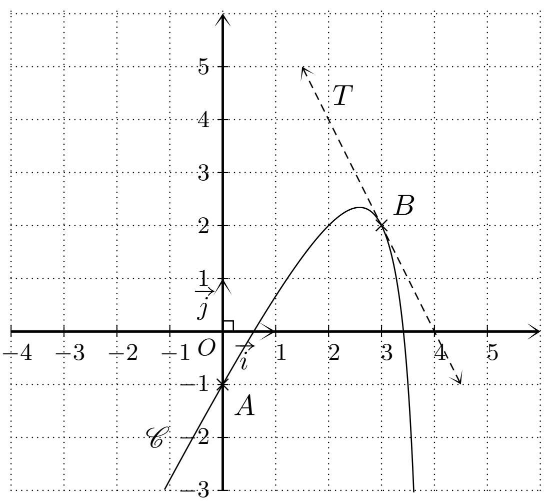
Exercice 4 - Soit f la fonction valeur absolue : $f(x) = |x|$. Etudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 5 -
Soit f une fonction définie sur $[-4\ ;\ 4]$ dont la représentaion graphique et certaines tangentes sont données ci-contre.



1. Lire les valeurs de $f(-4)$, $f'(-4)$, $f(1)$, $f'(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$.
2. f est-elle dérivable en -1 ?

Exercice 6 -



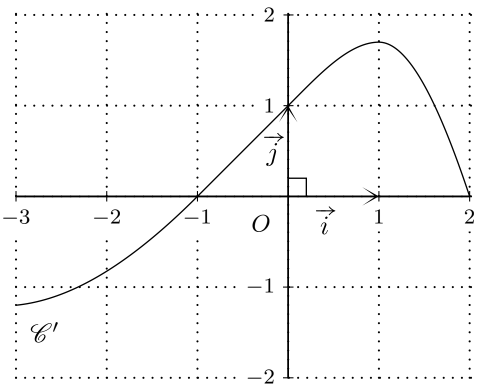
Soit f une fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 4[$ par $f(x) = ax + \dfrac{b}{x-4}$, où a et b sont des réels à déterminer. Sa représentation graphique $\mathscr{C}$ est réprésentée dans le repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) ci-contre.
$A\,(0\ ;\ -1) \in \mathscr{C}$ et la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $B\,(3\ ;\ 2)$.

1. Donner la valeur de $f(0)$. En déduire b.
2. a) Déterminer par lecture graphique, la valeur de $f'(3)$.
   b) Montrer par le calcul que $f'(x) = a - \dfrac{4}{(x-4)^2}$ pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 4[$.
   c) En déduire a.

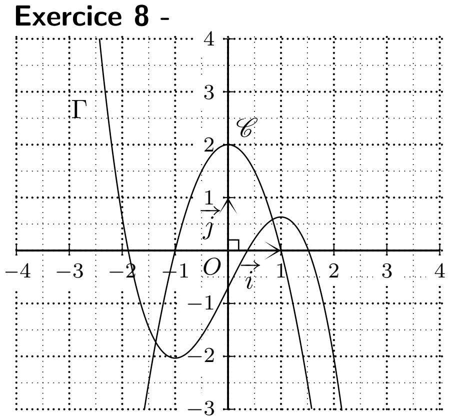
Exercice 7 -

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
La dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-contre.

Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[-3\ ;\ 2]$.



Exercice 8 -



Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a représenté ci-contre la courbe représentative de f et celle de sa fonction dérivée f'. Identifier chacune des courbes. Justifier.

Exercice 9 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 6x + 9)\mathrm{e}^x$. Etudier son sens de variation.

Exercice 10 - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

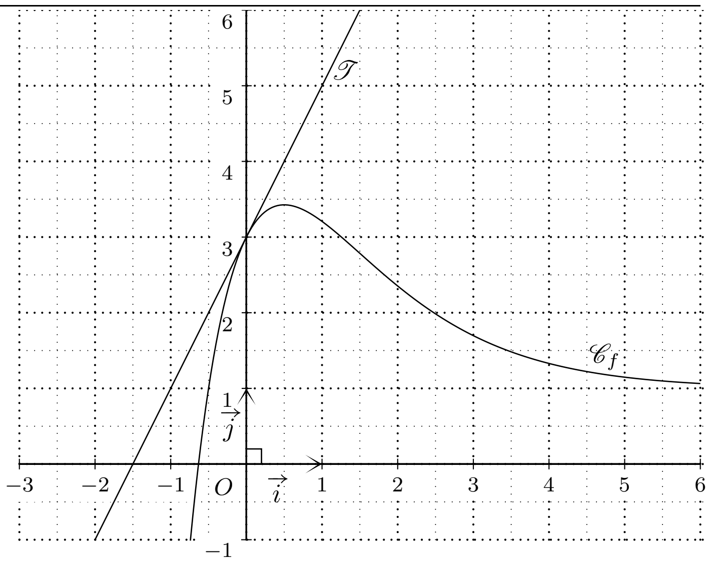
1. Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$.

1. Prouver que pour tout réel x, on a $g'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right)^2}$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g.

Exercice 12 - La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-contre est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 0.

1. En utilisant les données et le graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. On admet que l'expression de la fonction f est de la forme $1 + (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont des réels.
   a) Calculer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b et x.
   b) À l'aide des résultats de la question 1., déterminer l'expression de f.



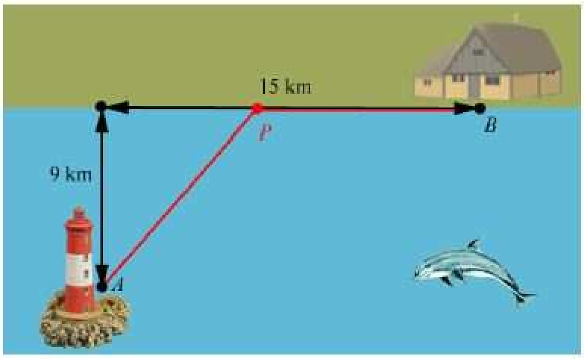
Exercice 13 -

Dans chaque cas, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = (x+5)\sqrt{x^2+2}$.
2. $f(x) = (3x-1)\mathrm{e}^{-7x+1}$.

Exercice 14 -

Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible sa maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit-il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



On note H le projeté orthogonal de A sur la côte et $x \in [0\ ;\ 15]$ la distance HP.

1. a) Prouver que $AP = \sqrt{x^2+81}$.
   b) En déduire que le temps de parcours du gardien de phare, en fonction de x, est $f(x) = 3 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}\sqrt{x^2+81}$.
2. Calculer $f'(x)$ et prouver que sur $[0\ ;\ 15]$, $f'(x) \geqslant 0 \iff 9x^2 - 1296 \geqslant 0$.
3. En déduire les variations de f sur $[0\ ;\ 15]$. Conclure.