Correction du devoir de mathématiques n° 9

Exercice 1 :

Un relevé de caisse de magasin a fourni les renseignements suivants concernant les modes de paiement et les montants de 2 000 achats :

☞ 66 % des achats sont payés par carte bancaire ;

☞ 30 % des achats sont d'un montant inférieur à 10 €, dont 40 % payés en espèces ;

☞ 14 % des achats sont payés en chèque.

Le magasin n'accepte pas les chèques lorsque le montant est inférieur à 10 €.

1. Compléter le tableau suivant :

Mode de paiement \ Montant	Inférieur à 10 €	Supérieur ou égal à 10 €	Total
Par carte bancaire	360	960	1 320
En espèces	240	160	400
Par chèques	0	280	280
Total	600	1 400	2 000

2. Une caissière enregistre un achat quelconque. On est dans une situation d'équiprobabilité.
   - A : « C'est un achat supérieur ou égal à 10 €. » $P(\text{A}) = \frac{1400}{2000} = \frac{7}{10}$.
   - B : « C'est un achat supérieur ou égal à 10 € payé en espèces. » $P(\text{B}) = \frac{160}{2000} = \frac{2}{25}$.
   - C : « C'est un paiement en espèces ou un achat inférieur à 10 €. » $P(\text{C}) = \frac{600+160}{2000} = \frac{19}{50}$.
3. Sachant qu'un achat est payé par carte bancaire, la probabilité que son montant soit inférieur à 10 € est $\frac{360}{1320} = \frac{3}{11}$.

Exercice 2 :

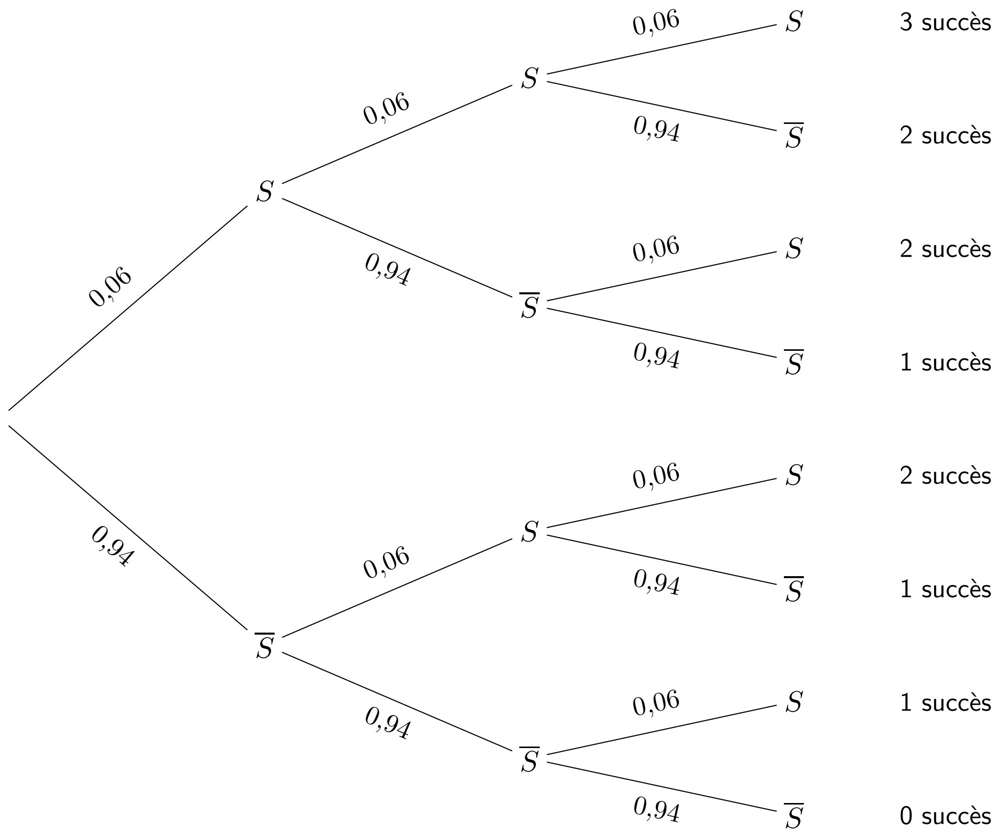
Un lycéen a sur son lecteur de musique 250 titres dont 15 de son groupe préféré. Chaque matin, en montant dans l'autobus, il met en route son lecteur en mode « Random ». On suppose que ce mode lit au hasard l'un des 250 titres et que la mise en route de ce mode génère chaque jour le choix d'un titre indépendant du titre lu les jours précédents.

Sur trois jours, on s'intéresse au nombre de fois où le lycéen écoute un titre de son groupe préféré.

1. Parmi les 250 titres, il existe 15 titres de son groupe préféré. Ainsi, en utilisant la loi équirépartie, la probabilité d'écouter un jour donné, un titre de son groupe préféré est $\frac{15}{250} = 0{,}06$.
2. Cette expérience aléatoire est la répétition de 3 épreuves de BERNOULLI de façon identique et indépendante, dont le succès (S) est « écouter un titre de son groupe préféré » et de probabilité $0{,}06$.

   Ainsi, le nombre de fois où il écoute un titre de son groupe préféré sur les trois jours, suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}06$.

3.



La probabilité d'un chemin est égale au produit des poids situés sur ce chemin.

4. a) Il existe trois chemins comportant exactement 1 succès, d'où une probabilité de $3 \times 0{,}06 \times 0{,}94^2 \approx 0{,}159$.

   La probabilité que le lycéen écoute exactement une fois sur les trois jours un titre de son groupe préféré est $0{,}159$ à 10^{-3} près.

   b) Pour facilité les calculs, il est préférable de passer par l'évènement contraire, c'est-à-dire calculer la probabilité que le lycéen n'entende jamais un titre de son groupe préféré. Il existe un seul chemin comptant 0 succès soit une probabilité de $0{,}94^3$.

   Par passage à l'évènement contraire, la probabilité que le lycéen entende au moins une fois sur les trois jours un titre de son groupe préféré est $1 - 0{,}94^3 \approx 0{,}169$ à 10^{-3} près.

5. On suppose maintenant que l'écoute se déroule sur n jours ($n \in \mathbb{N}^*$).

   En s'inspirant de la question précédente, la probabilité que le lycéen n'entende jamais un titre de son groupe préféré est $0{,}94^n$.

   On veut $0{,}94^n \leqslant 0{,}1$.

   À la calculatrice $0{,}94^{37} \approx 0{,}101$ et $0{,}94^{38} \approx 0{,}095$. Donc le nombre minimal de jours d'écoute nécessaires pour que la probabilité que le lycéen n'entende jamais un titre de son groupe préféré soit inférieure ou égale à $0{,}1$ est 38.

Exercice 3 :

Au service de soutien téléphonique d'un magasin d'informatique, une étude statistique a montré que la probabilité que le problème soulevé par le client soit résolu au téléphone dans un délai de 10 min est $0{,}7$. On considère que les appels sont indépendants les uns des autres. On estime que le centre d'appel reçoit 120 appels par jour.

Soit X la variable aléatoire qui, aux appels d'une journée, associe le nombre de problèmes résolus au téléphone dans un délai de 10 min.

1. Cette expérience aléatoire est la répétition de 120 épreuves de Bernoulli de façon identique et indépendante, dont le succès (S) est « le problème est résolu au téléphone dans un délai de 10 min » et de probabilité $0{,}7$.

   Ainsi, X, le nombre de problèmes résolus au téléphone dans un délai de 10 min , suit la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0{,}7$.

2. Puisque X suit une loi binomiale, son espérance est $E(X) = np = 120 \times 0{,}7 = 84$.

   On peut espérer résoudre 84 problèmes au téléphone dans un délai de 10 min dans une journée.

À l'aide du tableur, nous avons obtenu les probabilités suivantes :

k	68	69	70	...	98	99	100	101
$P(X = k)$	0,000 63	0,001 11	0,001 89	...	0,001 30	0,000 67	0,000 33	0,000 15
$P(X \leqslant k)$	0,001 34	0,002 46	0,004 35	...	0,998 72	0,999 40	0,999 73	0,999 89

3. En utilisant le tableau précédent, la probabilité qu'exactement 69 appels soient résolus au téléphone dans un délai de 10 min est $P(X = 69) = 0{,}001\,11$.
4. En utilisant le tableau, la probabilité qu'au plus 98 appels soient résolus au téléphone dans un délai de 10 min est $P(X \leqslant 98) = 0{,}998\,72$.
5. En utilisant le tableau, la probabilité qu'au moins 100 appels soient résolus au téléphone dans un délai de 10 min $P(X \geqslant 100) = 1 - P(X \leqslant 99) = 1 - 0{,}999\,40 = 0{,}000\,6$.
6. En utilisant le tableau, $P(70 \leqslant X \leqslant 100) = P(X \leqslant 100) - P(X \leqslant 69) = 0{,}999\,73 - 0{,}002\,46 = 0{,}997\,27$.

   La probabilité que le nombre de problèmes résolus au téléphone dans un délai de 10 min soit compris entre 70 et 100 est $0{,}997\,27$.

Exercice 4 :

Dans une usine informatique, on fabrique des écrans d'ordinateur. Lorsque la fabrication est « correcte », 13 % des écrans ont au moins un défaut. On contrôle aléatoirement 50 écrans, et on considère le choix de ces écrans assimilable à un tirage avec remise.

1. Cette expérience aléatoire est la répétition de 50 épreuves de BERNOULLI de façon identique et indépendante, dont le succès (S) est « l'écran a au moins un défaut » et de probabilité $0{,}13$.

   Ainsi, le nombre d'écrans ayant au moins un défaut, suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}13$.
2. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des écrans ayant au moins un défaut est $[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}]$, où a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

   Par lecture du tableau suivant, on a $a = 2$ et $b = 11$.

   On pourra utiliser le tableau suivant où $X \hookrightarrow \mathscr{B}(50; 0{,}13)$:

k	0	1	2	...	10	11	12	13
$P(X \leqslant k)$	0,000 94	0,008 01	0,033 89	...	0,946 50	0,975 81	0,990 04	0,996 25

   L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des écrans ayant au moins un défaut est $[\frac{2}{50} ; \frac{11}{50}]$.
3. On dénombre 9 écrans qui possèdent au moins un défaut. Ainsi, la fréquence des écrans ayant au moins un défaut $\frac{9}{50}$ appartient à $[\frac{2}{50} ; \frac{11}{50}]$, intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

   Il n'y a donc aucune raison d'arrêter la production, au risque de 5 %.

Exercice 5 :

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3, \quad \text{pour } n \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Calcul les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

   $u_0 = -1$
   $u_1 = -2u_0 + 3 = -2 \times (-1) + 3 = 5$
   $u_2 = -2u_1 + 3 = -2 \times 5 + 3 = -7$
   $u_3 = -2u_2 + 3 = -2 \times (-7) + 3 = 17$
   $u_4 = -2u_3 + 3 = -2 \times 17 + 3 = -31$
2. L'algorithme ci-contre affiche, une fois exécuté, la valeur de u_{100}.

Début
- Variables :
  - u est un réel
  - i est un entier naturel
- Initialisation :
  - Affecter à u la valeur -1
- Traitement :
  - **Pour** $i = 1$ **jusqu'à** 100 **faire**
    - Affecter à u la valeur $-2u + 3$
  - **Fin Pour**
- Sortie :
  - Afficher la valeur de u

Fin