Correction du devoir de mathématiques n° 6

Exercice 1 :

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)$ pour tout réel x.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)}}$. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

2. D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ par croissances comparées

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{3x^2+1}\right)$:

   FI de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ »

   Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\ln(x)}{3x^2+1} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{3x+\frac{1}{x}}$

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x+\dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}\times\dfrac{1}{3x+\frac{1}{x}} = 0$$ par produit et quotient

   Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{3x^2+1}\right) = 0}$

3. g est la fonction défnie sur $]-2\ ;\ 2[$ par $g(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$.

   g est continue sur $]-2\ ;\ 2[$ donc admet des primitives sur $]-2\ ;\ 2[$.

   $g(x) = -\frac{1}{2}\times\dfrac{-2x}{4-x^2}$

   On reconnaît le formule $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 4-x^2$ et $u'(x) = -2x$.

   $G(x) = -\frac{1}{2}\times\ln\left|4-x^2\right| + k$, où k est une constante réelle.

   $4-x^2$ s'annule en -2 et 2 donc $4-x^2>0$ entre les racines c'est-à-dire sur $]-2\ ;\ 2[$ $(a<0)$.

   Donc $G(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(4-x^2\right)+k$

   $G(\sqrt{3}) = 6 \iff -\frac{1}{2}\ln\left(4-\sqrt{3}^2\right)+k = 6 \iff -\frac{1}{2}\ln(1)+k = 6 \iff k = 6$

   Donc, $\boxed{G(x) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(4-x^2\right)+6}$

4. La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle. On modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.

   On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = 1000\left(1+0{,}9^n\right)$.

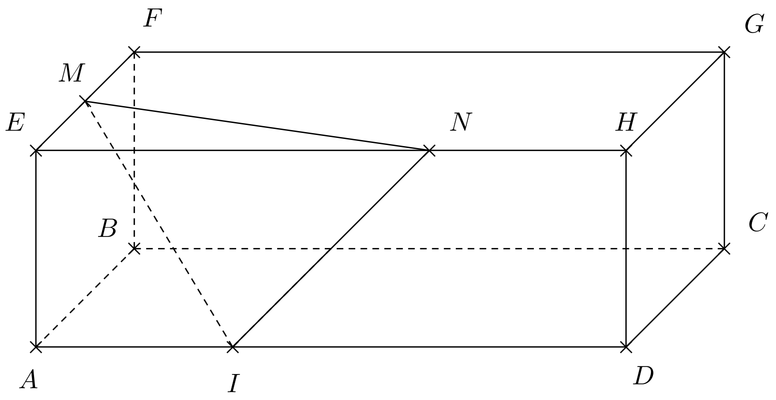
   $$\begin{array}{ll} & u_n < 1020\\ \iff & 1000\left(1+0{,}9^n\right) < 1020\\ \iff & 1+0{,}9^n < \frac{1020}{1000}\\ \iff & 1+0{,}9^n < 1{,}02\\ \iff & 0{,}9^n < 0{,}02\\ \iff & \ln\left(0{,}9^n\right) < \ln 0{,}02\\ \iff & n\ln 0{,}9 < \ln 0{,}02\\ \iff & n > \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}9} \end{array}$$ $\ln 0{,}9 < 0$ donc le sens est inversé

   A la calculatrice, $\frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}9} \simeq 37{,}13$ donc $n = 38$

   En 2058, le nombre d'individus de cette espèce sera strictement inférieur à 1020 pour la première fois.

Exercice 2 :

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 1, AE = 1$ et $AD = 3$.
I est le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, M est le milieu du segment $[EF]$ et N est le point défini par $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.



L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AI}\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$. Par exemple, le point N a pour coordonnées $(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$ dans ce repère.

1. $I\,(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $M\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.

2. a) $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{IN} = -1\times 1 + \frac{1}{2}\times 0 + 1\times 1 = 0$

   $\boxed{\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{IN} = 0}$

   b) On déduite de la question précédente que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$ sont orthogonaux. Le du triangle MIN est donc rectangle en I.

   $IM = \sqrt{(x_M - x_I)^2 + (y_M - y_I)^2 + (z_M - z_I)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

   $IN = \sqrt{(x_N - x_I)^2 + (y_N - y_I)^2 + (z_N - z_I)^2} = \sqrt{2}$

   L'aire du triangle MIN est $\mathscr{A} = \frac{IM\times IN}{2} = \frac{\frac{3}{2}\times\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$

3. a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MIN) si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires « du plan (MIN) ».

   $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{IM}$ ne sont pas proportionnelles à celles de $\overrightarrow{IN}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$ ne sont pas colinéaires.

   $\vec{u}\cdot\overrightarrow{IM} = 1\times(-1) + 4\times\frac{1}{2} + (-1)\times 1 = 0$

   $\vec{u}\cdot\overrightarrow{IN} = 1\times 1 + 4\times 0 + (-1)\times 1 = 0$

   Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires « du plan (MIN) » donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (MIN).

   b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MIN) donc une équation cartésienne de (MIN) est $x + 4y - z + d = 0$ où $d\in\mathbb{R}$

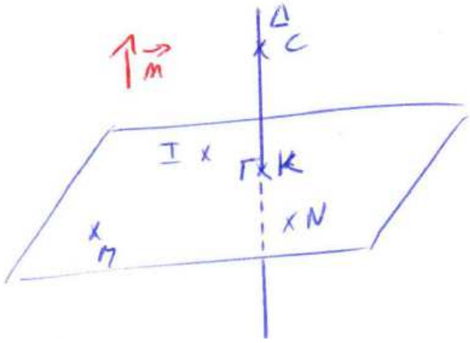
   $I\in(MIN)$ donc $x_I + 4y_I - z_I + d = 0 \iff 1 + d = 0 \iff d = -1.$

   $\boxed{(MIN) : x + 4y - z - 1 = 0}$

4. On considère le point $C\,(3\ ;\ 1\ ;\ 0)$.
   L'objectif de cette question est de déterminer la distance du point C au plan (MIN).

a) La droite Δ perpendiculaire au plan (MIN) donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$, vecteur normal au plan (MIN) est également un vecteur directeur de la droite Δ.

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc



$$\Delta : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 4t \quad ,t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

b) Les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point C sur le plan (MIN) vérifient le système

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = -t \\ x + 4y - z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = -t \\ (3+t) + 4(1+4t) - (-t) - 1 = 0 \end{cases}$$

$(3+t) + 4(1+4t) - (-t) - 1 = 0 \iff 18t + 6 = 0 \iff t = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$

D'où, $\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \\ y = 1 + 4 \times (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3} \\ z = -(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\boxed{K\left(\frac{8}{3}\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)}$

c) Puisque K est projeté orthogonal de C sur le plan (MIN), la distance du point C au plan (MIN) est égale à CK.

$CK = \sqrt{(x_K - x_C)^2 + (y_K - y_C)^2 + (z_K - z_C)^2} = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (-\frac{4}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \boxed{\sqrt{2}}$

5. $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$

$\mathscr{B}$ est l'aire du triangle MIN, soit $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

h est la hauteur relative à la base MIN, soit $CK = \sqrt{2}$.

Donc, $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$

Le volume de la pyramide $MINC$ est $\boxed{\frac{1}{2}}$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(x-3)\ln(x)}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x - 3 + 3\ln(x)$.

1. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} x - 3 = -3 \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \end{array}\right\} \implies \boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty}$ par somme

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x - 3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \end{array}\right\} \implies \boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$ par somme

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 1 + \frac{3}{x} > 0$ pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$. On en déduit que g est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

D'où le tableau de variation de g sur $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	$\vdots$	$+$	
$g(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. g est <u>continue</u> car dérivable, et <u>strictement croissante</u> sur $]0\ ;\ +\infty[$. L'image de $]0\ ;\ +\infty[$ par g est $]-\infty\ ;\ +\infty[$.
   Or $0 \in]-\infty\ ;\ +\infty[$.
   Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\ ;\ +\infty[$.

   A la calculatrice, $\alpha \approx 1{,}60$ à 10^{-2} près.
4. Puisque g est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et s'annule en α, on a g strictement négative sur $]0\ ;\ \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, et nulle en α.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Partie B. Étude de la fonction f

1. On résout $f(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

   $*$ $x = 0 \notin]0\ ;\ +\infty[$ est une valeur interdite.

   $$\begin{array}{lll} * & x - 3 = 0 & \text{ou } \ln(x) = 0 \\ \iff & x = 3 & \text{ou } x = \mathrm{e}^0 = 1 \end{array}$$

   $\boxed{S = \{1\ ;\ 3\}}$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$:

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x - 3 = -3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty} \quad \text{par produit et quotient}$$

   On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
3. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(1 \times \ln(x) + (x-3) \times \frac{1}{x}\right) \times x - (x-3)\ln(x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{\left(\ln(x) + \frac{x-3}{x}\right) \times x - (x-3)\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x\ln(x) + x - 3 - (x-3)\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{\cancel{x\ln(x)} + x - 3 - \cancel{x\ln(x)} + 3\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x - 3 + 3\ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

   Puisque $g(x) = x - 3 + 3\ln(x)$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout réel x strictement positif.
4. $x^2 > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc le signe de $f'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est le même que celui de g sur $]0\ ;\ +\infty[$ (voir la partie A.)

Ainsi, f' est négative sur $]0\ ;\ \alpha]$ et positive sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$. On en déduit que f est décroissante sur $]0\ ;\ \alpha]$ et croissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.