Devoir de mathématiques n° 6 (*2 heures*)

La qualité de la rédaction, la clarté et la présentation des raisonnements entreront pour une part importante dans la notation.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : (5 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer l'expression de la fonction dérivée de f où $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{-2x} + 1\right)$ pour tout réel x.
2. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$, puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{3x^2+1}\right)$.
3. g est la fonction défnie sur $]-2\ ;\ 2[$ par $g(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$. Déterminer la primitive de g sur $]-2\ ;\ 2[$, notée G, qui vaut 6 en $\sqrt{3}$.
4. La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle. On modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.

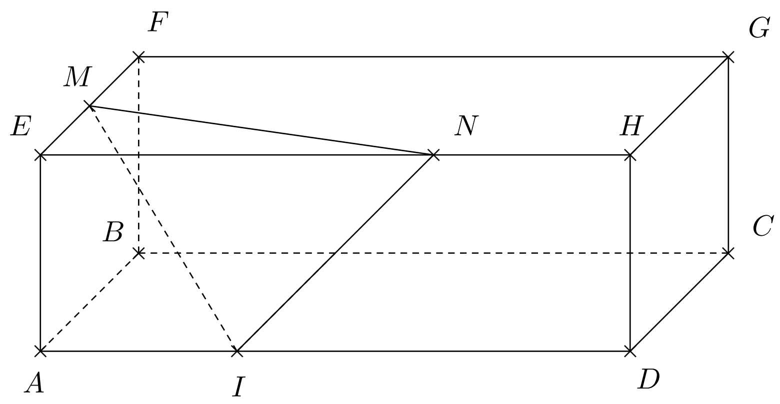
   On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = 1000\left(1 + 0{,}9^n\right)$.

   Déterminer par un calcul, en quelle année le nombre d'individus de cette espèce sera strictement inférieur à 1020 pour la première fois.

Exercice 2 : (7 points)

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 1, AE = 1$ et $AD = 3$.

I est le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, M est le milieu du segment $[EF]$ et N est le point défini par $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.



L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AI}\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$. Par exemple, le point N a pour coordonnées $(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$ dans ce repère.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points I et M.
2. a) Calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$.

   b) En déduire la nature du triangle MIN puis calculer son aire.
3. a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MIN).

   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MIN) est $x + 4y - z - 1 = 0$.
4. On considère le point $C\,(3\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

   L'objectif de cette question est de déterminer la distance du point C au plan (MIN).

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire au plan (MIN) passant par le point C.

b) Calculer les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point C sur le plan (MIN).

c) Montrer que la distance du point C au plan (MIN) est égale à $\sqrt{2}$.

5. Calculer le volume V de la pyramide $MINC$.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

Exercice 3 : (8 points)

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(x-3)\ln(x)}{x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x - 3 + 3\ln(x)$.

1. Calculer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Calculer $g'(x)$, étudier le sens de variation de la fonction g et dresser son tableau de variation complet sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. On donnera une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ en fonction de α.

Partie B. Étude de la fonction f

1. Résoudre sur $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.
2. Calculer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   On admettra le résultat suivant: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$