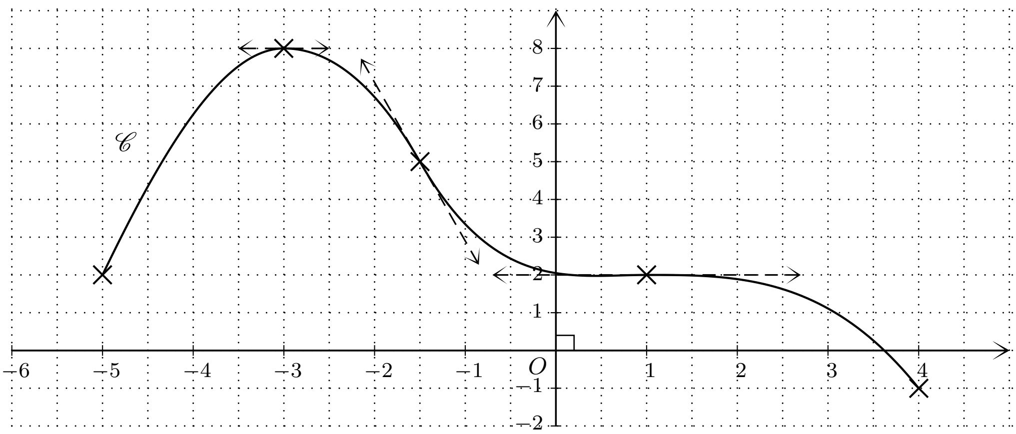
Correction du devoir de mathématiques n° 4

Exercice 1 : (QCM)

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-5\ ;\ 4]$ ainsi que ses tangentes en certains points.



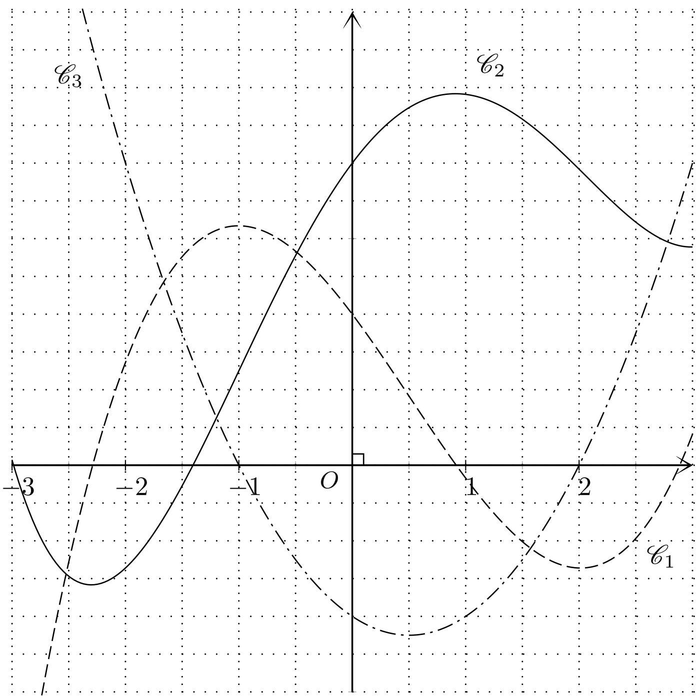
1. f est concave sur l'intervalle $[-5\ ;\ -1{,}5]$: **Réponse B**
2. La courbe $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexion : **Réponse B** (en $x = -1{,}5$ et $x = 1$)
3. Sur l'intervalle $[-5\ ;\ -1{,}5]$, la fonction f' est croissante : **Réponse B** car f est concave sur cet intervalle.
4. Pour tout $x \in [-3\ ;\ 1], f'(x) \leqslant 0$: **Réponse B** car f est décroissante sur cet intervalle.
5. $f''(x) \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle $[-1{,}5\ ;\ 1]$: **Réponse C** car f est convexe sur cet intervalle.
6. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $-1{,}5$ est $y = -4x - 1$: **Réponse C**.
7. $g(1) \times g(-4) = 1{,}4^1 \times 1{,}4^{-4} = 1{,}4^{1+(-4)} = 1{,}4^{-3} = g(-3)$:**Réponse C**.
8. Pour tout réel x, $\quad 4 \times 2^x = 2^2 \times 2^x = 2^{x+2}$: **Réponse C**.

Exercice 2 :

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Sur la figure ci-dessous sont représentées les courbes de f, la fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.

Associons chaque courbe à sa fonction en justifiant à l'aide d'arguments graphiques.



I étant un intervalle, on a les équivalences :
f est convexe sur I $\iff$ f' est croissante sur I $\iff$ f'' est positive sur I ;
f est concave sur I $\iff$ f' est décroissante sur I $\iff$ f'' est négative sur I.

On peut résumer les observations et équivalences par le tableau suivant :

x		-1		2	
Signe de f'' : $\mathscr{C}_3$	$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de f' : $\mathscr{C}_1$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
Convexité de f : $\mathscr{C}_2$	Convexe		Concave		Convexe

De tout cela, on déduit que la courbe $\mathscr{C}_2$ représente la fonction f, la courbe $\mathscr{C}_1$ représente la fonction f', et la courbe $\mathscr{C}_3$ représente la fonction f''.

Exercice 3 :

1. Pour tout x réel, prouver les égalités suivantes :

   a) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x}\right) &= \left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 2\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} + \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{3x} - \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 \\ &= \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x-x} + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x+3x} - \mathrm{e}^{-2x} \\ &= \cancel{\mathrm{e}^{2x}} - 2\mathrm{e}^0 + \cancel{\mathrm{e}^{-2x}} - \cancel{\mathrm{e}^{2x}} - \cancel{\mathrm{e}^{-2x}} \\ &= -2\mathrm{e}^0 \\ &= -2 \times 1\end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout réel x, $\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x}\right) = -2$;

   b) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} + \frac{\mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right) \times \mathrm{e}^x} &= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} + \frac{\mathrm{e}^{-x+x}}{\mathrm{e}^{-x+x} + \mathrm{e}^x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} + \frac{\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} + \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + 1} \\ &= 1\end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a)
$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{x^2+x} = \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^9 \\ \iff\ & \mathrm{e}^{x^2+x} = \mathrm{e}^{3+9} \\ \iff\ & \mathrm{e}^{x^2+x} = \mathrm{e}^{12} \\ \iff\ & x^2 + x = 12 \\ \iff\ & x^2 + x - 12 = 0\end{aligned}$$
   Il s'agit d'une équation du second degré :
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49$
   $\Delta > 0$, donc il existe deux solutions réelles distinctes.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 - 7}{2} = -4$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{49}}{2\times 1} = \dfrac{-1+7}{2} = 3$

$\boxed{S = \{-4\ ;\ 3\}}$

b)
$$\begin{array}{lll} & (3e^x-3)(e^x+2)=0 & \\ \iff & 3e^x-3=0 \quad \text{ou} & e^x+2=0 \\ \iff & 3e^x=3 \quad \text{ou} & e^x=-2 \\ \iff & e^x=1 & \text{mais } e^x>0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \iff & e^x=e^0 & \\ \iff & x=0 & \end{array}$$

$\boxed{S=\{0\}}$

c)
$$\begin{array}{lll} & 2xe^x-e^x=0 & \\ \iff & (2x-1)e^x=0 & \\ \iff & 2x-1=0 \quad \text{ou} & e^x=0 \\ \iff & x=\frac{1}{2} & \text{mais } e^x>0 \text{ sur } \mathbb{R} \end{array}$$

$\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$

Exercice 4 :

Une ébénisterie fabrique entre 10 et 40 bibliothèques par mois. On estime le coût de fabrication de x bibliothèques à $C(x)=0{,}1x^3+50x+200$ en euro.

Chaque bibliothèque est vendue 320 €.

1. a) Le coût de fabrication de 12 bibliothèques est $C(12)=0{,}1\times 12^3+50\times 12+200=972{,}8$, soit 972,8 €.

   b) La recette engendrée par la vente de 12 bibliothèques, est égale à $320\times 12=3840$, soit 3 840 €. L'ébénisterie dégage un bénéfice pour la fabrication et la vente de 12 bibliothèques égale à $3840-972{,}8=2867{,}2$, soit 2 867,2 €.

2. On note $B(x)$ le bénéfice en euro obtenu par la fabrication et la vente de x bibliothèques.

   a) Soit $x\in[10\ ;\ 40]$, $\quad B(x)=\underbrace{320x-C(x)}_{\text{recette } - \text{ coûts de fabrication}}=320x-0{,}1x^3-50x-200=-0{,}1x^3+270x-200$.

   Ainsi, $B(x)=-0{,}1x^3+270x-200$, pour tout $x\in[10\ ;\ 40]$.

   b) B est dérivable sur $[10\ ;\ 40]$ et $B'(x)=-0{,}3x^2+270$.

   $B'(x)=0 \quad\iff\quad x^2=900 \quad\iff\quad x=-30\notin[10\ ;\ 40]$ ou $x=30$.

   D'où le tableu de signe de $-0{,}1x^3+270x-200$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-30		10		30		40		$+\infty$
$-0{,}3x^2+270$ $a=-0{,}3<0$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	

   On en déduit le tableau de variation de f :

x	10		30		40
$B'(x)$		$-$	0	$+$	
$B(x)$	2400	$\nearrow$	5200	$\searrow$	4200

   B est croissante sur $[10\ ;\ 30]$ puis décroissante sur $[30\ ;\ 40]$.

   c) D'après les variations de B, l'ébénisterie doit fabriquer et vendre 30 bibliothèques par mois pour dégager un bénéfice maximal. Ce bénéfice maximal est égal à 5 200 €.

3. a) B' est dérivable sur $[10\ ;\ 30]$ et $B''(x)=-0{,}6x<0$ sur $[10\ ;\ 30]$.

   D'où le tableau de signe de $B''(x)$ sur $[10\ ;\ 40]$:

x	10 $\qquad\qquad$ 40
$B''(x)$	$-$

B'' est strictement négative sur $[10\ ;\ 30]$.

b) Sur l'intervalle $[30\ ;\ 40]$, $B''(x) < 0$. On en déduit que la fonction B est concave sur $[30\ ;\ 40]$. On peut donc qualifier la croissance du bénéfice de ralentie. Ainsi, la décroissance du bénéfice est accélérée sur $[30\ ;\ 40]$.

Exercice 5 :

En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Partie A

Le musée dispose d'un site internet. Pour acheter son billet, une personne intéressée peut se rendre au guichet d'entrée du musée ou commander un billet en ligne.
Trois types de visites sont proposés :

- La visite individuelle sans location d'audioguide.
- La visite individuelle avec location d'audioguide.
- La visite en groupe d'au moins 10 personnes. Dans ce cas, un seul billet est émis pour le groupe.

Le site internet permet uniquement d'acheter les billets individuels avec ou sans audioguide.
Pour la visite de groupe, il est nécessaire de se rendre au guichet d'entrée du musée.

Sur l'année 2015 l'enquête a révélé que :

- 55 % des billets d'entrée ont été achetés au guichet du musée ;
- parmi les billets achetés au guichet du musée, 51 % des billets correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide, et 37 % à des visites avec location d'audioguide ;
- 70 % des billets achetés en ligne correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide.

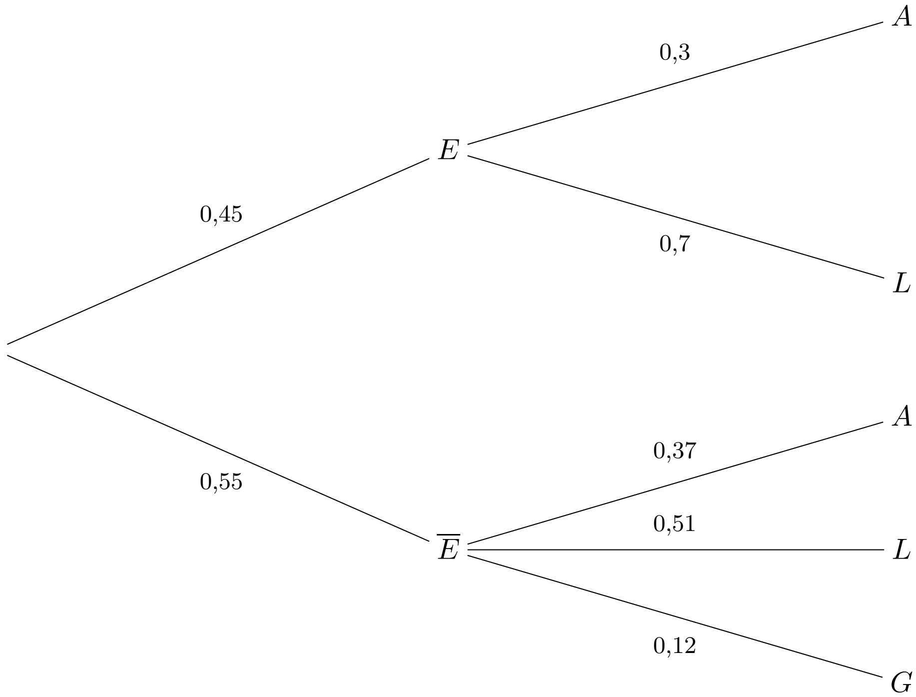
On choisit au hasard un billet d'entrée au musée acheté en 2015.
On considère les événements suivants :

- E : « le billet a été acheté en ligne » ;
- A : « le billet correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide » ;
- L : « le billet correspond à une visite individuelle sans location d'audioguide » ;
- G : « le billet correspond à une visite de groupe ».

On rappelle que si E et F sont deux événements, $P(E)$ désigne la probabilité de l'événement E et $P_F(E)$ désigne la probabilité de l'événement E sachant que l'événement F est réalisé. On note $\overline{E}$ l'événement contraire de E.

Suite, page suivante.

1. Complétons l'arbre pondéré suivant qui représente la situation décrite dans l'énoncé :



   La probabilité d'un chemin est égale au produit des poids situés sur ce chemin.

2. $P(E \cap A) = P_E(A) \times P(E) = 0{,}3 \times 0{,}45 = 0{,}135$

   La probabilité que le billet ait été acheté en ligne et corresponde à une visite individuelle avec location d'audioguide est égale à $0{,}135$.

3. E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E \cap A) + P(\overline{E} \cap A) \\ &= 0{,}135 + P_{\overline{E}}(A) \times P(\overline{E}) \\ &= 0{,}135 + 0{,}37 \times 0{,}55 \\ &= 0{,}3385 \end{aligned}$$

   La probabilité qu'un billet corresponde à une visite individuelle avec location d'audioguide et égale $0{,}338\,5$.

4. Le billet choisi correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide.

   La probabilité que ce billet ait été acheté au guichet du musée est égale à $P_A(\overline{E})$.

$$P_A(\overline{E}) = \frac{P(\overline{E} \cap A)}{P(A)} = \frac{P_{\overline{E}}(A) \times P(\overline{E})}{P(A)} = \frac{0{,}37 \times 0{,}55}{0.3385} \approx 0{,}601$$

   La probabilité que ce billet ait été acheté au guichet du musée est égale à $0{,}601$ au millième près.

Partie B

On interroge 5 personnes au hasard dans le musée. Le nombre de visiteurs étant important, on peut considérer que le choix se fait de manière indépendante.

La probabilité qu'une personne soit munie d'un billet correspondant à une visite de groupe est égale à $P(\overline{E} \cap G) = P_{\overline{E}}(G) \times P(\overline{E}) = 0{,}12 \times 0{,}55 = 0{,}066$.

Ainsi, la probabilité qu'une personne ne soit pas munie d'un billet correspondant à une visite de groupe est égale à $1 - P(\overline{E} \cap G) = 1 - 0{,}066 = 0{,}934$.

La probabilité qu'aucune personne parmi les cinq, ne soit munie d'un billet correspondant à une visite de groupe est égale à $0{,}934^5$.

Par passage à l'événement contraire, la probabilité qu'au moins une personne soit munie d'un billet correspondant à une visite de groupe est égale $1 - 0{,}934^5$, soit $0{,}289$ au millième près.