Correction du devoir de mathématiques n° 3

Exercice 1 :

Dans cet exercice, on ne s'intéressera pas aux ensembles de définition des fonctions.

1. Donnons l'expression de la fonction $f = v \circ u$ où $u(x) = 3x^2 + 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
   $f(x) = v \circ u(x) = v\left(u(x)\right) = v\left(3x^2+5\right) = \sqrt{3x^2+5}$
   $\boxed{f(x) = v \circ u(x) = \sqrt{3x^2+5}}$
2. Donnons l'expression de deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$ avec $f(x) = -3\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x - 1$. On pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = -3x^2 + 4x - 1$
   En effet, $v \circ u(x) = v\left(u(x)\right) = v\left(\mathrm{e}^x\right) = -3\left(\mathrm{e}^x\right)^2 + 4\mathrm{e}^x - 1 = -3\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x - 1$

Exercice 2 :

Calculons la limite des suites suivantes :

a) $u_n = 2n^2 + 5n + 2$

Ce n'est pas une forme indéterminée

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5n+2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty} \quad \text{par somme}$$

b) $v_n = \dfrac{3n+1}{5n^2+n-5}$

Il s'agit d'une forme indéterminée de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Au voisinage de $+\infty$, $v_n = \dfrac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(5+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{n\left(5+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n} = 3 \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2} = 5\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(5+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0} \quad \text{par produit et quotient}$$

c) $t_n = 6^n - 7^n$

Il s'agit d'une forme indéterminée de la forme « $+\infty - \infty$ »

Au voisinage de $+\infty$, $t_n = 7^n\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n = +\infty \quad \text{car } 7>1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0 \quad \text{car } -1<\frac{6}{7}<1 \text{ d'où } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n - 1 = -1\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} t_n = -\infty} \quad \text{par produit}$$

Exercice 3 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a $\sin^2(n) \geqslant 0$ donc $n^2 + \sin^2(n) \geqslant n^2$ d'où $\sqrt{n^2+\sin^2(n)} \geqslant \sqrt{n^2}$ car la fonction racine-carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   Ainsi, $\sqrt{n^2+\sin^2(n)} \geqslant n$ pour tout entier naturel n.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+\sin^2(n)} = +\infty}$ par comparaison.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \dfrac{2n - \cos(2n)}{n^2}$
   $$\begin{array}{ll} & -1 \leqslant \cos(2n) \leqslant 1 \\ \Longleftrightarrow & 1 \geqslant -\cos(2n) \geqslant -1\end{array}$$

$$\iff \quad 2n+1 \geqslant 2n-\cos(2n) \geqslant 2n-1$$
$$\iff \quad \frac{2n+1}{n^2} \geqslant \frac{2n-\cos(2n)}{n^2} \geqslant \frac{2n-1}{n^2} \quad \text{car } n^2>0$$
$$\iff \quad \frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \geqslant \frac{2n-\cos(2n)}{n^2} \geqslant \frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}$$
$$\iff \quad \frac{2}{n}-\frac{1}{n^2} \leqslant z_n \leqslant \frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=0}$ d'après le théorème des « Gendarmes ».

Exercice 4 :

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

En tenant compte de l'observation de ces populations d'insectes en laboratoire et des contraintes du milieu naturel, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.
On a $u_0=0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}6u_n-1{,}6u_n^2$.

1. $u_1=1{,}6u_0-1{,}6u_0^2=0{,}144$. Au bout d'un mois, il y a 144 000 insectes.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$ par $f(x)=1{,}6x-1{,}6x^2$.
   f est dérivable sur $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$ et $f'(x)=1{,}6-3{,}2x$
   $1{,}6-3{,}2x=0 \quad \iff \quad x=\frac{1{,}6}{3{,}2}=\frac{1}{2}$
   D'où le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$:

x	0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0{,}4$

   f est croissante sur $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$.

3. a) On remarque que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   Prouvons par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$.
   * **Initialisation :** $u_0=0{,}1$ et $u_1=0{,}144$ donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant\frac{1}{2}$.
     Les inégalités sont donc vraies au rang 0.
   * **Hérédité :** supposons que $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$ pour un entier $n\geqslant 0$ quelconque et montrons que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\frac{1}{2}$.
     On a $\quad 0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$
     $\Longrightarrow \quad f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(\frac{1}{2})$ car la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$ donc l'ordre est conservé
     $\Longrightarrow \quad 0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 0{,}4\leqslant\frac{1}{2}$ on élargit
     $\Longrightarrow \quad 0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\frac{1}{2}$
     L'hérédité est démontrée.
   * **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

   b) De la question précédente, on a :
      $u_n\leqslant u_{n+1}$ pour tout entier $n\geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.
      $u_n\leqslant\frac{1}{2}$ pour tout entier $n\geqslant 0$. La suite (u_n) est donc majorée par $\frac{1}{2}$.
   Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$. D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$. Puisque $u_{n+1}=1{,}6u_n-1{,}6u_n^2$ pour tout entier naturel n, par passage à la limite, on a :

$$\begin{array}{rl} & \ell = 1{,}6\ell - 1{,}6\ell^2 \\ \iff & 1{,}6\ell^2 - 0{,}6\ell = 0 \\ \iff & \ell(1{,}6\ell - 0{,}6) = 0 \\ \iff & \ell = 0 \text{ ou } 1{,}6\ell - 0{,}6 = 0 \\ \iff & \ell = 0 \text{ ou } 1{,}6\ell - 0{,}6 = 0 \\ \iff & \ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{0{,}6}{1{,}6} = 0{,}375 \end{array}$$

La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 0{,}1$ donc $\ell \geqslant 0{,}1$. La suite (u_n) converge donc vers $\ell = 0{,}375$.

4. La suite (u_n) est croissante et elle converge vers $0{,}375$. Donc, $u_n \leqslant 0{,}375$ pour tout entier naturel n. Selon ce modèle, le nombre d'insectes ne dépassera pas 375 000. L'équilibre du milieu naturel sera alors préservé.
5. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

```python
def seuil(a):
  u=0.1
  n=0
  while u<a:
    u=1.6*u-1.6*u**2
    n=n+1
  return n
```

   a) L'algorithme ci-contre s'arrête et affiche un résultat dès que la valeur d'un terme u de la suite (u_n) est supérieure ou égale au seuil a.

   Si on saisit seuil(0.4), l'algorithme ne s'arrêtera jamais car on a vu dans la question précédente que $u_n \leqslant 0{,}375$ pour tout entier naturel n. Ainsi, u ne pourra pas dépasser 0.4.

   b) seuil(0.35) :

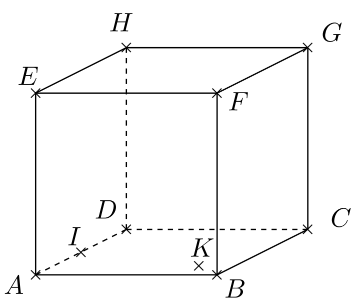
   On a $\begin{cases} u_5 \simeq 0{,}338 < 0{,}35 \\ u_6 \simeq 0{,}358 > 0{,}35 \end{cases}$

   Ainsi, la saisie de seuil(0.35) renvoie la valeur 6.

   Au bout de 6 mois, le nombre d'insectes sera supérieur ou égal à 350 000.

<u>Exercice 5</u> :

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. Le point I est le milieu du segment $[AD]$.



On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. a) $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$ est un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires (cube d'arête 1 donc cube non aplati).

   b) $A\,(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\,,\ B\,(1\ ;\ 0\ ;\ 0)\,,\ C\,(1\ ;\ 1\ ;\ 0)\,,\ D\,(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\,,\ E\,(0\ ;\ 0\ ;\ 1)\,,$ $F\,(1\ ;\ 0\ ;\ 1)\,,\ G\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $H\,(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

   c) I est le milieu du segment $[AD]$ donc $I\left(\frac{x_A+x_D}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_D}{2}\ ;\ \frac{z_A+z_D}{2}\right)$ c'est-à-dire $I\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

On considère le point K de la face $ABCD$ tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BD}$ et le point L tel que $\overrightarrow{DL} = \frac{4}{7}\overrightarrow{DE}$.

   d) $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BD}$

   $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} x_K - 1 \\ y_K \\ z_K \end{pmatrix}$ | $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{1}{5}\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

   Comme $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$, on a $\begin{cases} x_K - 1 = -\frac{1}{5} \\ y_K = \frac{1}{5} \\ z_K = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_K = \frac{4}{5} \\ y_K = \frac{1}{5} \\ z_K = \end{cases}$ $\quad \boxed{K\left(\frac{4}{5}\ ;\ \frac{1}{5}\ ;\ 1\right)}$

   e) Le point L appartient à la face $ADHE$ du cube.

2. $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (IF).

Une représentation paramétrique de la droite (IF) (avec le point I) est : (IF) : $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, \quad t \in \mathbb{R} ; \\ z = t \end{cases}$

On admet que le point L a pour coordonnées $L\left(0 ; \frac{3}{7} ; \frac{4}{7}\right)$ et qu'une représentation paramétrique de la droite (KL) est $\begin{cases} x = \frac{4}{5} - 7t \\ y = \frac{1}{5} + 2t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$

3. Les droites (IF) et (KL) sont sécantes si et seulement si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} t = \frac{4}{5} - 7t' \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = \frac{1}{5} + 2t' \\ t = 5t' \end{cases} \iff \begin{cases} 5t' = \frac{4}{5} - 7t' \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = \frac{1}{5} + 2t' \\ t = 5t' \end{cases} \iff \begin{cases} t' = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = \frac{1}{5} + 2t' \\ t = 5t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t' = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = \frac{1}{5} + 2t' \\ t = 5 \times \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} t' = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{15} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} t' = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{égalité vérifiée} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, les droites (IF) et (KL) sont sécantes en un point Ω.

Avec $t = \frac{1}{3}$ dans la représentation paramétrique de (IF), on a : $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$

Doù $\boxed{\Omega\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)}$

Exercice 6 :

L'espace est muni d'un repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(0 ; 1 ; 0)$; $B(0 ; 0 ; -1)$ et $C(1 ; 0 ; 2)$.

Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} ; \\ z = 3 - t \end{cases}$

1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles à celles du vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C définissent un plan.

2. $C(1 ; 0 ; 2) \in (d)$?

$$\begin{cases} 1 = 2 - t \\ 0 = -2 + 2t \\ 2 = 3 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Donc le point C est un point de la droite (d).

3. $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite (d).

Existe-t'il deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$?

$\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

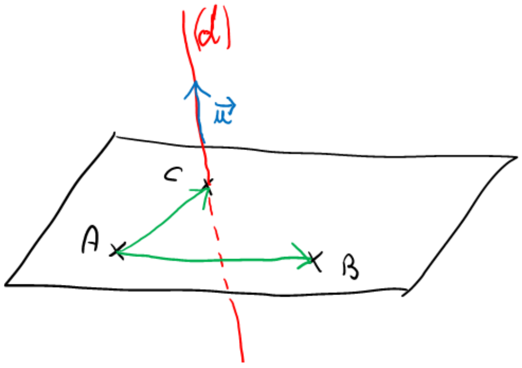
L'égalité $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ devient :

$$\begin{cases} -1 = 0 \times \alpha + \beta \\ 2 = -\alpha - \beta \\ -1 = -\alpha + 2\beta \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = \beta \\ 2 = -\alpha - (-1) \\ -1 = -\alpha + 2 \times (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = \beta \\ -1 = \alpha \\ -1 = \alpha \end{cases}$$

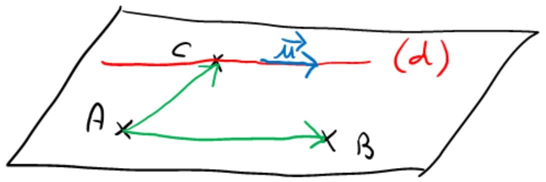
Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}$

4. On sait déjà que le plan (ABC) et la droite (d) ont au moins un point commun (le point C) :

- Soit (d) et (ABC) sont sécants



- Soit (d) est incluse dans le plan (ABC)



Mais, d'après la question précédente, on peut dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires (un vecteur est exprimé en fonction des deux autres).
Ainsi, la droite (d) est incluse dans le plan (ABC).