Devoir de mathématiques n° 3 (*2 heures*)

La qualité de la rédaction, la clarté et la présentation des raisonnements entreront pour une part importante dans la notation.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : (1 point)

Dans cet exercice, on ne s'intéressera pas aux ensembles de définition des fonctions.

1. Donner l'expression de la fonction $f = v \circ u$ où $u(x) = 3x^2 + 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
2. Donner l'expression de deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$ avec $f(x) = -3\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} - 1$.

Exercice 2 : (3 points)

Calculer la limite des suites suivantes :

a) $u_n = 2n^2 + 5n + 2$; b) $v_n = \dfrac{3n+1}{5n^2+n-5}$; c) $t_n = 6^n - 7^n$.

Exercice 3 : (3 points)

1. Justifier que $\sqrt{n^2 + \sin^2(n)} \geqslant n$ pour tout entier naturel n, et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 + \sin^2(n)}$.
2. En utilisant le théorème des « Gendarmes », calculer la limite de la suite de terme général $z_n = \dfrac{2n - \cos(2n)}{n^2}$, définie pour tout entier naturel n strictement positif.

Exercice 4 : (5 points)

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

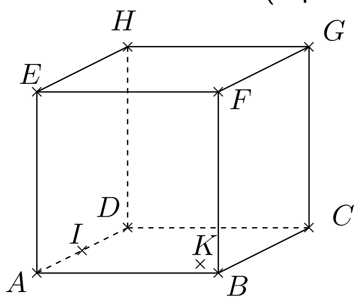
En tenant compte de l'observation de ces populations d'insectes en laboratoire et des contraintes du milieu naturel, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.
On a $u_0 = 0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}6u_n - 1{,}6u_n^2$.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$ par $f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2$.
   Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$.
3. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ la valeur de sa limite.
   c) Déterminer la valeur de ℓ.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.
5. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.
   a) Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?
   b) Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil(a):
  u=0.1
  n=0
  while u<a:
    u=1.6*u-1.6*u**2
    n=n+1
  return n
```

Exercice 5 : (4 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. Le point I est le milieu du segment $[AD]$.



On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. a) Pourquoi $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$ est-il un repère de l'espace ?
   b) Donner les coordonnées des points $A; B; C; D; E; F; G$ et H dans ce repère.
   c) **Calculer** les coordonnées du point I.

On considère le point K de la face $ABCD$ tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BD}$ et le point L tel que $\overrightarrow{DL} = \frac{4}{7}\overrightarrow{DE}$.

   d) **Calculer** les coordonnées du point K.
   e) Sur quelle face du cube se situe le point L ?

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IF).

   On admet que le point L a pour coordonnées $L\left(0\ ;\ \frac{3}{7}\ ;\ \frac{4}{7}\right)$ et qu'une représentation paramétrique de la droite (KL) est $\begin{cases} x = \frac{4}{5} - 7t \\ y = \frac{1}{5} + 2t \quad ,t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$

3. Prouver que les droites (IF) et (KL) sont sécantes et calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 6 : (4 points)

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

On considère les points $A\,(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$; $B\,(0\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et $C\,(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}\ ; \\ z = 3 - t \end{cases}$

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Montrer que le point C appartient à la droite (d).
3. On note $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite (d). Donner les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer la position relative de la droite (d) et du plan (ABC).
   (*strictement parallèles ? Sécants ?* (d) *incluse dans le plan* (ABC) *?*)