Correction du devoir de mathématiques n° 2

Exercice 1 :

`Les probabilités demandées seront données à` 10^{-3} `près.`

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.

Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

— Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas ;

— Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

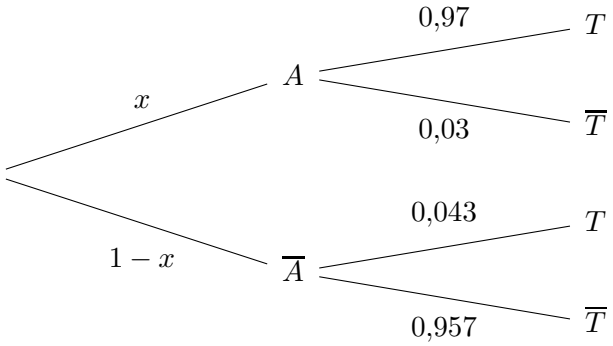
Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- A l'évènement « l'individu est allergique » ;
- T l'évènement « l'individu présente un test positif ».

On notera $\overline{A}$ et $\overline{T}$ les évènements contraires de A et T. On appelle par ailleurs x la probabilité de l'évènement A : $P(A) = x$.

1. $P(T) = 0{,}2$, $P_A(T) = 0{,}97$ et $P_{\overline{A}}(\overline{T}) = 0{,}957$.
2. Complétons l'arbre ci-dessous décrivant la situation.



3. a) A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totale,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(A \cap T) + P(\overline{A} \cap T) \\ &= P(A) \times P_A(T) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(T) \\ &= x \times 0{,}97 + (1-x) \times 0{,}043 \\ &= 0{,}97x + 0{,}043 - 0{,}043x \\ &= 0{,}927x + 0{,}043 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(T) = 0{,}927x + 0{,}043}$

b) On veut calculer $P(A) = x$. D'après l'énoncé, on sait que $P(T) = 0{,}2$.
D'où, $0{,}2 = 0{,}927x + 0{,}043 \iff x = \frac{0{,}157}{0{,}927} \simeq 0{,}169$ à 10^{-3} près

La probabilité que l'individu choisi soit allergique est $P(A) \simeq 0{,}169$ à 10^{-3} près

4. Calculons $P_T(A)$ pour justifier l'affirmation suivante :
« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».

$$P_T(A) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(A) \times P_A(T)}{P(T)} \simeq \frac{0{,}169 \times 0{,}97}{0{,}2} \simeq 0{,}820$$

Ainsi, si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a environ 82 % de chances que cet individu soit allergique. L'affirmation est donc justifée.

Exercice 2 :

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateau à voile et bateau à moteur.

Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote. On sait que 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On considère un échantillon aléatoire de 40 clients, assimilé à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. Cette expérience aléatoire est la répétition de 40 épreuves de BERNOULLI identiques et indépendantes dont le succès est « le client prend l'option PILOTE » avec une probabilité $p = 0{,}42$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}42$.
   $X \hookrightarrow \mathscr{B}(40\ ;\ 0{,}42)$.
   Pour tout entier k compris entre 0 et 40, $P(X = k) = \binom{40}{k} \times 0{,}42^k \times (1 - 0{,}42)^{40-k}$.
2. $P(X = 10) = \binom{40}{10} \times 0{,}42^{10} \times (1 - 0{,}42)^{40-10} \simeq 0{,}012$
   La probabilité, arrondie à 10^{-3}, que 10 clients prennent l'option PILOTE est $0{,}012$.
3. $P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14) \simeq 1 - 0{,}232 = 0{,}768$
   La probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE est $0{,}768$.
4. $E(X) = np = 40 \times 0{,}42 = 16{,}8$. Dans un échantillon de 40 clients, il y a en moyenne $16{,}8$ clients ayant pris l'option PILOTE.
5. $$\begin{aligned} P_{(X\geqslant 15)}(X \leqslant 20) &= \frac{P\Big((X \geqslant 15) \cap (X \leqslant 20)\Big)}{P(X \geqslant 15)} \\ &= \frac{P(15 \leqslant X \leqslant 20)}{P(X \geqslant 15)} \\ &= \frac{P(X \leqslant 20) - P(X \leqslant 14)}{P(X \geqslant 15)} \\ &\simeq \frac{0{,}882 - 0{,}232}{0{,}768} \quad \text{on utilise la question précédente pour la valeur du dénominateur} \\ &\simeq 0{,}846 \end{aligned}$$
   Ainsi, $P_{(X\geqslant 15)}(X \leqslant 20) \simeq 0{,}846$ à 10^{-3} près.
6. On considère l'algorithme ci-après, écrit en langage Python. On admet que la fonction *Binomiale(k,n,p)* calcule la valeur $P(X = k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

```python
sum=0
for k in range(0,31):
  sum=sum+Binomiale(k,40,0.42)
print(sum)
```

   Cet algorithme calcule et additionne les probabilités $P(X = k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 30$,
   soit $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = 30) = P(X \leqslant 30)$

Exercice 3 :

Dans chaque cas, sans se préoccuper du domaine de dérivabilité, calculer l'expression de la fonction dérivée.

a) $f(x) = (-5x^2 + 7x - 1)^{2023}$
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
   $f'(x) = 2023(-10x + 7)(-5x^2 + 7x - 1)^{2022} = (-20230x + 14161)(-5x^2 + 7x - 1)^{2022}$
   $\boxed{f'(x) = (-20230x + 14161)(-5x^2 + 7x - 1)^{2022}}$

b) $g(x) = \mathrm{e}^{-3x^2+1}$
   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$
   $\boxed{g'(x) = -6x \times \mathrm{e}^{-3x^2+1}}$

c) $\varphi(x) = 2x^3\sqrt{5x+1}$

φ est dérivable sur $]-\frac{1}{5}\ ;\ +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

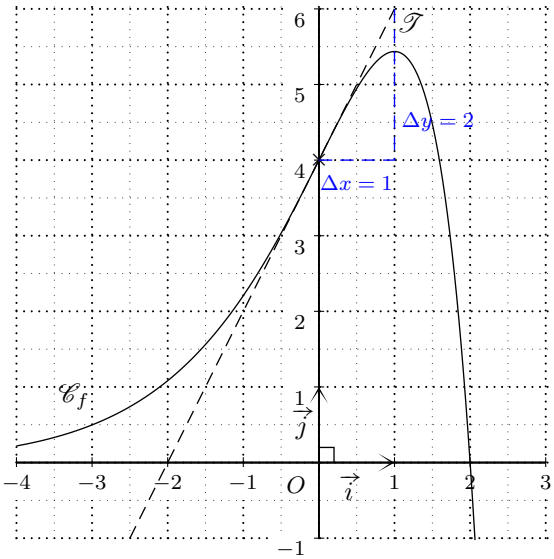
$(uv)' = u'v + uv'$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= 6x^2 \times \sqrt{5x+1} + 2x^3 \times \frac{5}{2\sqrt{5x+1}} \\
&= 6x^2\sqrt{5x+1} + \frac{5x^3}{\sqrt{5x+1}} \\
&= \frac{6x^2\sqrt{5x+1} \times \sqrt{5x+1}}{2\sqrt{5x+1}} + \frac{5x^3}{\sqrt{5x+1}} \\
&= \frac{6x^2(5x+1) + 5x^3}{\sqrt{5x+1}} \\
&= \frac{35x^3 + 6x^2}{\sqrt{5x+1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{35x^3 + 6x^2}{\sqrt{5x+1}}}$$

Exercice 4 :

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-contre est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$, où a et b sont des constantes réelles. On note f' la fonction dérivée de f et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 0.



1. $*$ $f(0) = 4$

   $*$ $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   $f'(0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{1} = 2$

2. On admet que l'expression de la fonction dérivée de f est $f'(x) = (ax+a+b)\mathrm{e}^x$.

   De l'égalité $f0) = 4$, il vient $(a\times 0+b)\mathrm{e}^0 = 4 \iff b = 4$.

   De l'égalité $f'(0) = 2$, il vient

   $(a\times 0 + a + b)\mathrm{e}^0 = 2 \iff a+b = 4 \iff a = -2$

   Ainsi, $\boxed{f(x) = (-2x+4)\mathrm{e}^x}$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-3x^2+2x+1)\mathrm{e}^{2x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-6x+2)\mathrm{e}^{2x} + (-3x^2+2x+1) \times 2\mathrm{e}^{2x}$

   $$\begin{aligned} &= (-6x+2-6x^2+4x+2)\mathrm{e}^{2x} \\ &= (-6x^2-2x+4)\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{f'(x) = (-6x^2-2x+4)\mathrm{e}^{2x}}$, pour tout x réel.

2. On sait que $\mathrm{e}^{2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ dépend du signe de $-6x^2-2x+4$.

   On résout $-6x^2-2x+4 = 0$

   Il s'agit d'une équation du second degré :

   $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times(-6)\times 4 = 100$

   $\Delta > 0$, donc il existe deux solutions réelles distinctes.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{100}}{2\times(-6)} = \frac{2}{3}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{100}}{2\times(-6)} = -1$$

D'où le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-4\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$	$\searrow$	

$f(-1) = -4\mathrm{e}^{-2}$ et $f(\frac{2}{3}) = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$.

f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$ puis croissante sur $[-1\ ;\ \frac{2}{3}]$, et enfin décroissante sur $\left[\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

3. $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Mais $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.

   Ainsi, $\boxed{T : y = 4x+1}$.

Exercice 6 :

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}64x^2 + 0{,}6x + 2$ et $g(x) = -x+1$.
On note $\mathscr{P}$ la parabole associée à f et $\mathscr{D}$ la droite associée à g dans un repère orthogonal.

Pour étudier la position relative de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$, on étudie le signe de différence $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x)-g(x) = 0{,}64x^2+0{,}6x+2-(-x+1) = 0{,}64x^2+0{,}6x+2+x-1 = 0{,}64x^2+1{,}6x+1 = (0{,}8x+1)^2$

Identité remarquable

$0{,}8x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{0{,}8} = -\frac{5}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$(0{,}8x+1)^2$		$+$	0	$+$	

Ainsi, $f(x) - g(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la parabole $\mathscr{P}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, $f(x) - g(x) = 0$ en $x = -\frac{5}{4}$ donc la parabole $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ se coupent en $x = -\frac{5}{4}$.