

Dénombrement - k -uplets

Exercice 1 (Listes d'un ensemble fini)

Le premier tour de la coupe du monde féminine est organisé en six groupes de quatre équipes. Chaque équipe affronte les trois autres une seule fois. A la fin de tous les matches, les deux premières équipes de chaque groupe sont qualifiées pour le deuxième tour.

Le classement est important, car la 1^{re} équipe affronte la 2^e équipe d'un autre groupe.

La France (F) est dans le même groupe que le Nigéria (Ni), la Norvège (No) et la Corée du Sud (C).

Soit $E = \{F, Ni, No, C\}$ l'ensemble de ces quatre équipes.

1. On décide que le couple (F, C) signifie que la France finit première du groupe et que la Corée du sud termine deuxième du groupe.

A l'aide d'un arbre de choix, lister les couples possibles d'équipes qualifiées pour le deuxième tour dans le groupe de la France. Combien y en a-t-il ?

2. Un classement des quatre équipes est une permutation de E, c'est-à-dire une liste composée de tous les éléments de E, sans répétition possible. Par exemple, la liste (F, No, Ni, C) signifie que la France finit 1^{re}, la Norvège 2^e, le Nigéria 3^e et la Corée de Sud 4^e.

Déterminer le nombre de classements possibles dans ce groupe. On ne demande pas de les lister.

Exercice 2

Soit $E = \{a, b, 1, 2\}$.

1. Combien y a-t-il de 5-uplets formés avec des éléments de E ?

2. Combien y a-t-il de 5-uplets formés avec des éléments de E et commençant par b ?

Exercice 3

Un code PIN de smartphone est un code confidentiel composé de 4 chiffres.

1. Combien y a-t-il de codes PIN différents ?

2. Combien y a-t-il de codes PIN commençant par le chiffre 3 ?

Exercice 4

On dispose de trois tiroirs notés A, B et C, et de cinq paires de chaussettes de couleurs différentes. Déterminer le nombre de rangements possibles pour ces cinq paires de chaussettes.

Exercice 5

Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires. On tire **successivement et sans remise** 2 boules.

Déterminer dans chaque cas le nombre de tirages :

1. contenant 2 boules de même couleur ;

2. contenant une boule blanche au second tirage.

Exercice 6

Un enfant qui ne connaît pas les chiffres compose sur un cadran de téléphone un numéro à 10 chiffres.

Déterminer dans chaque cas le nombre de numéros :

a) avec 10 chiffres pairs ;

b) se terminant par 3 zéros ;

c) avec au moins un 3.

Exercice 7

Calculer le nombre de poignées de mains échangées entre n personnes ($n \geq 2$)

Exercice 8

1. Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec les lettres M, O, T et S ?

2. Combien de mots de 8 lettres peut-on former avec les lettres E, L, E, P, H, A, N et T ?

3. Combien de mots de 25 lettres peut-on former avec les lettres

A, N, T, I, C, O, N, S, T, I, T, U, T, I, O, N, N, E, L, L, E, M, E, N et T ?

Exercice 9

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. Dans chaque cas, exprimer le nombre en fonction de n sans utiliser la notation factorielle.

$$A = \frac{n!}{(n-2)!} \quad B = \frac{(n-1)!}{(n+2)!} \quad C = \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$$